

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos

Pedro Infante Moreira

Tomo 3



ESPOCH
2016

**Electromagnetismo básico
e introducción a los circuitos eléctricos**

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos

Tomo 3

Pedro Infante Moreira



**Electromagnetismo básico
e introducción a los circuitos eléctricos**

© 2015 Pedro Infante Moreira

© 2015 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 1/2

Instituto de investigación

Riobamba, Ecuador

Teléfono: 593 (03) 2 998-200

Código Postal: EC060155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego
(*peer review*).

Corrección y diseño:

La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa
autorización por escrito de los propietarios del Copyright.

CDU: 537 + 621.3

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos. Tomo 3.

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Instituto de Investigaciones; 2015

104 p. vol: 17 x 24 cm

ISBN: 978-9942-14-228-3

1. Física
2. Electricidad
3. Circuitos eléctricos
4. Electromagnetismo

CONTENIDO TOMO 3

Capítulo 6. Corriente eléctrica y resistencia.....	9
6.1 Corriente eléctrica.....	9
6.2 Corriente convencional	10
6.3 Velocidad de arrastre o de deriva	11
6.4 Densidad de corriente	12
6.5 Resistencia, Ley de Ohm.....	14
6.6 Resistividad, conductividad	16
6.7 Coeficiente de temperatura para la resistividad	18
6.8 Disipación de energía en una resistencia	19
6.9 Ejercicios de aplicación	20
Capítulo 7. Circuitos resistivos	35
7.1 Fuerza electromotriz.....	35
7.2 Resistencia interna	38
7.3 Ley de las corrientes de Kirchhoff.....	39
7.4 Ley de los voltajes de Kirchhoff	41
7.5 Asociación de resistencias.....	43
7.5.1 Resistencias conectadas en serie	43
7.5.2 Resistencias conectadas en paralelo.....	44
7.5.3 Transformación delta-estrella ($\Delta \rightarrow Y$).....	46
7.6 Método de las corrientes de nodos	46
7.7 Método de las corrientes de malla	48
7.8 Circuitos RC en serie	51
7.8.1 Proceso de carga de un condensador	51
7.8.2 Proceso de descarga del condensador	55
7.9 Ejercicios de aplicación	57
Capítulo 8. Campo magnético.....	81
8.1 Polos magnéticos	81
8.2 Descubrimiento de Oersted y Ampere	82
8.3 Campo magnético	83

8.4 Líneas de inducción magnética	87
8.5 Fuerza magnética sobre un conductor	88
8.6 Momento de torsión sobre un lazo de corriente en un campo magnético uniforme	90
8.7 Ejercicios de aplicación	93

CAPÍTULO 6

CORRIENTE ELÉCTRICA Y RESISTENCIA

6.1 Corriente eléctrica

En la figura 6.1(a), se muestran dos elementos conductores A y B con cargas Q^+ y Q^- , respectivamente. Estos generan un campo eléctrico. A estos dos elementos (A y B), si unimos con un hilo conductor (figura 6.1 (b)), los electrones se moverán desde el punto B hasta el punto A; entonces, decimos que existe una corriente eléctrica y se lo representa con la letra i .

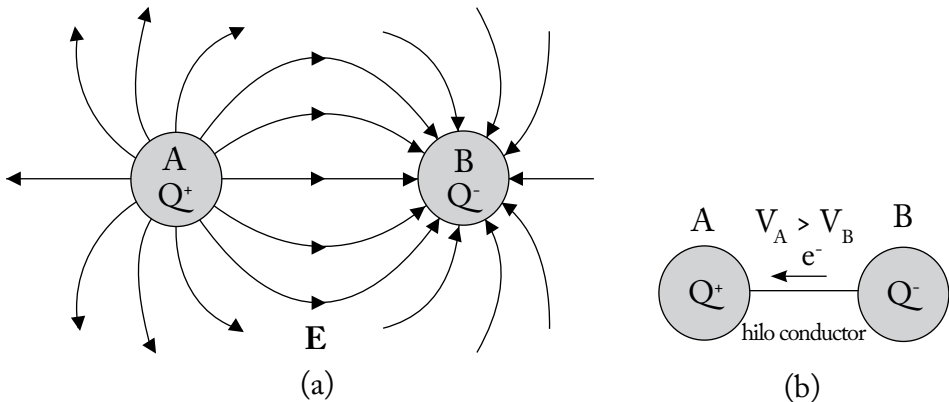


Figura 6.1 (a) Campo eléctrico entre las cargas A y B,
(b) hilo conductor entre el material A y B

Corriente eléctrica.- Se dice que existe una corriente eléctrica o simplemente corriente si en una región del espacio existe un flujo ordenado de cargas; en otras palabras, cuando hay variación de cargas. Existen corrientes variables cuando es una función del tiempo, esto es, $i = f(t)$; y corrientes constantes cuando no varían con el tiempo.

Medición de la corriente.- En la figura 6.2, se dispone de un alambre conductor muy largo por el cual existe un flujo de cargas. La corriente eléc-

trica i es la cantidad neta de cargas por unidad de tiempo, que atraviesan la sección transversal ($S=A$ = área) del conductor; esto es:

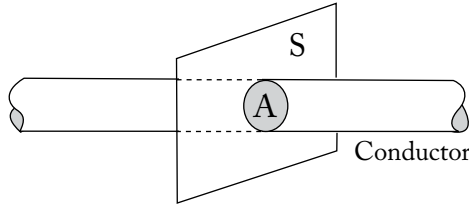


Figura 6.2. Alambre conductor de sección transversal A

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \rightarrow i = \frac{dq}{dt}, \text{ para un flujo variable de cargas}$$

$$i = \frac{q}{t}, \text{ cuando el flujo de cargas es constante a través de la sección transversal } A \text{ del conductor (figura 6.2).}$$

La corriente i viene dada en amperios; la carga q , en coulomb y el tiempo t , en segundos. La corriente eléctrica es una cantidad macroscópica.

6.2 Corriente convencional

La velocidad de arrastre V_d es con la cual los electrones se mueven en sentido contrario al campo eléctrico en un conductor (figura 6.3). Una carga positiva que se mueve en la misma dirección del campo eléctrico es equivalente, para casi todos los efectos externos, a una carga negativa que se mueve en dirección opuesta. Por consiguiente, la dirección de la corriente es en el sentido que se mueven las cargas positivas. La corriente i es una característica de un conductor dado y es una cantidad macroscópica.

Si el potencial en V_A es mayor que el potencial en V_B , el campo eléctrico \mathbf{E} va dirigido desde V_A hasta V_B y la corriente i lleva la misma dirección.

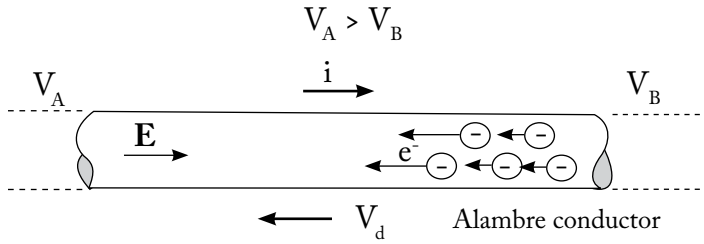


Figura 6.3. Alambre conductor

El sentido de la corriente convencional va de mayor a menor potencial eléctrico (figura 6.4).

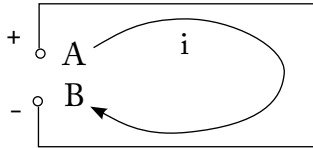


Figura 6.4. Sentido de circulación de la corriente i

6.3 Velocidad de arrastre o de deriva

En la figura 6.5(a), si el potencial $V_A = V_B$, entonces, el campo eléctrico $E = 0$ y el flujo neto de cargas a través de la superficie es igual a cero.

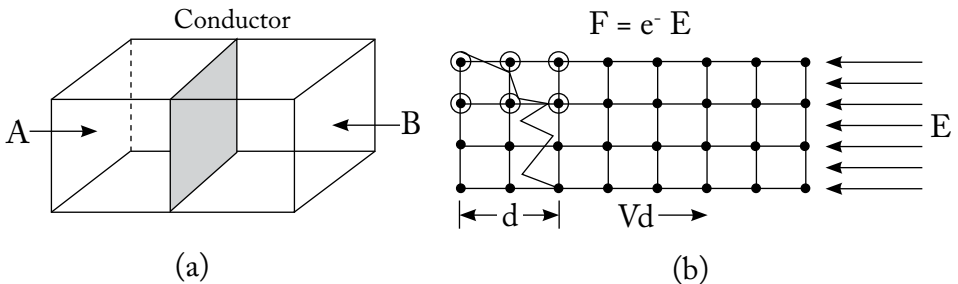


Figura 6.5. (a) Flujo neto a través de una superficie, (b) desplazamiento de los electrones en un campo eléctrico

Desde el punto de vista microscópico (figura 6.5(b)), los electrones se mueven en sentido contrario al campo eléctrico y llevan una velocidad V_d , que se denomina velocidad de arrastre o de deriva, debido a que los electrones, al desplazarse, van chocando unos con otros. La fórmula es:

$$V_d = \frac{d}{\Delta t}, \quad \text{velocidad de deriva.}$$

6.4 Densidad de corriente

La densidad de corriente es un vector, se representa con la letra j y tiene la misma dirección que la corriente. Considerando la figura 6.6, la densidad de corriente se define como la cantidad total de corriente que atraviesa una sección transversal en forma perpendicular; esto es:

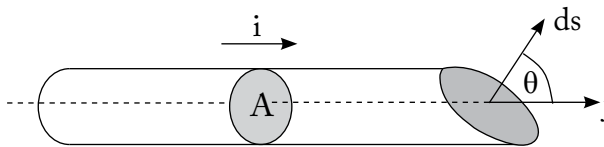


Figura 6.6. Alambre conductor

$j = i/A$, entonces la densidad de corriente depende del área del alambre conductor.

Así, se despeja la corriente $i = jA$. Si tomamos un diferencial de área, entonces tenemos un diferencial de corriente, esto es, $di = j ds$. Si la sección transversal del alambre conductor no es perpendicular (figura 6.6), quedaría definido en forma general como:

$$di = j ds \cos \theta \quad \rightarrow \quad di = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$$

$$i = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$$

El vector j en un punto cualquiera está orientado en la dirección en que los portadores positivos de carga se moverán en ese punto. Un electrón en ese punto se movería en la dirección $-j$.

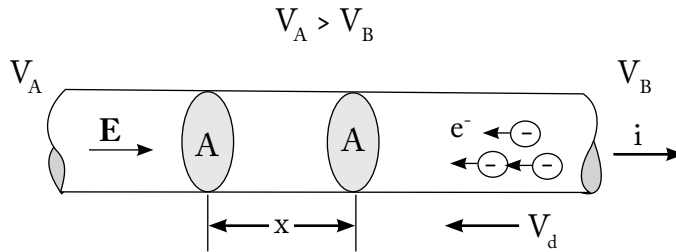


Figura 6.7. Velocidad de arrastre de los portadores de carga (electrones) en un material conductor

La velocidad de arrastre V_d de los portadores de carga en un conductor puede calcularse a partir de la densidad de corriente j . La figura 6.7 muestra los electrones de conducción en un alambre, moviéndose hacia la izquierda, a una velocidad de arrastre promedio supuesta constante V_d .

El número de electrones conductores en el alambre es nAx siendo n el número de electrones por unidad de volumen y Ax el volumen del alambre. Por el extremo izquierdo del alambre, sale una carga de magnitud:

$$\Delta Q = (n Ax) e \quad \rightarrow \quad n = \frac{\text{número de electrones}}{\text{volumen}}$$

$$x = V_d \Delta t$$

$$\Delta Q = nAe V_d \Delta t$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = nAe V_d = i$$

$$V_d = \frac{i}{nAe} \tag{6-1}$$

6.5 Resistencia, Ley de Ohm

De la ecuación (6-1), despejamos la corriente que circula por el alambre: $nAe V_d = i \rightarrow V_d \propto i \rightarrow E \propto i \rightarrow V \propto i$. Para que esto sea una igualdad, debemos poner una constante de proporcionalidad y esta constante es la resistencia del alambre, que lo representamos con la letra R en la ecuación (6-2).

$$V = R i \quad (6-2)$$

$$R = \frac{V}{i} = \frac{\text{voltios}}{\text{amperios}} = \text{ohm} = \Omega$$

La resistencia es la oposición que presenta el material al paso de la corriente, es decir, la resistencia limita el paso de la corriente.

Ley de Ohm

La ecuación (6-2) representa la ley de Ohm. La figura 6.8 muestra la representación gráfica de esta ley, donde a es el punto de mayor potencial eléctrico y el punto b el de menor potencial, entonces, la corriente circula de mayor a menor potencial. Para indicar el voltaje, la flecha apunta al de mayor potencial, donde el voltaje total es la diferencia de potencial que hay entre los dos puntos; esto es: $\Delta V = V_a - V_b = V_{ab} = V$.

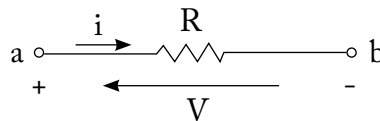


Figura 6.8. Representación gráfica de la ley de Ohm

A temperatura constante, la resistencia de un conductor es constante, independientemente del voltaje aplicado (figura 6.8). La ley de Ohm establece que el voltaje entre los extremos de muchos tipos de materiales conductores es directamente proporcional a la corriente que fluye a través del material.

$$V \propto i \quad \rightarrow \quad V = Ri$$

Donde la constante de proporcionalidad R recibe el nombre de resistencia. Los *conductores óhmicos* son los que obedecen a la ley de Ohm (figura 6.9).

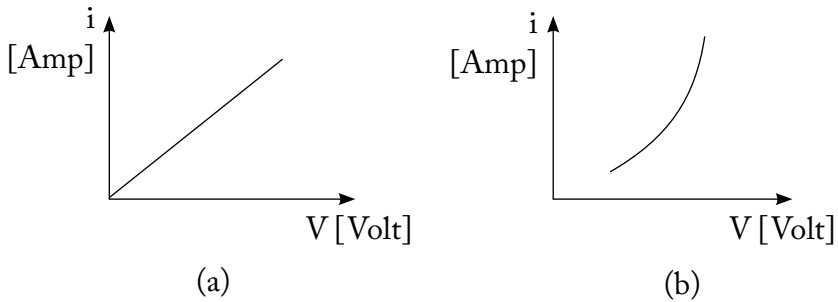


Figura 6.9. Gráficos de i vs. v , (a) la gráfica obedece la ley de Ohm, (b) la gráfica no obedece la ley de Ohm.

La figura 6.9 muestra la gráfica de la corriente i en función del voltaje v . La línea recta que resulta quiere decir que la resistencia de este conductor es la misma cualquiera que sea el voltaje aplicado para medir la resistencia (figura 6.9(a)). Todo elemento lineal obedece a la ley de Ohm; mientras que si la gráfica (figura 6.9(b)) i vs. v no es lineal, entonces, no obedece la ley de Ohm.

6.6 Resistividad, conductividad

Resistividad.- La resistividad se representa con el símbolo ρ . Es una característica de un material y no de una muestra especial del material, es decir, no depende del volumen; se define para materiales isótropos (son los materiales cuyas propiedades —eléctricas en este caso— no varían con la dirección que se tome en el material). La resistencia de un conductor entre a y b puede expresarse en términos microscópicos. La resistividad viene definida de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{E}{j} [\text{Ohm} - \text{m}]$$

En un conductor cilíndrico (figura 6.7) de sección transversal A y longitud L que lleva una corriente constante i , apliquemos una diferencia de potencial V_{ab} entre sus extremos, para calcular el valor de la resistencia en función de la resistividad; esto es:

$$R = \frac{V_{ab}}{i} = \frac{-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}} = \frac{EL}{jA} = \rho \frac{L}{A}$$

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

La resistencia R del material conductor es característica de la sustancia y de la geometría del conductor, mientras que la resistividad es intrínseca, propia de cada material, y no depende del volumen (geometría). A continuación, expresamos las siguientes conclusiones con respecto a las fórmulas:

$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$, es la ley de Ohm microscópicamente.

$V = R i$, es la ley de Ohm macroscópicamente.

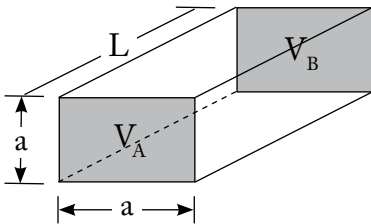
$\rho = \frac{E}{j}$, depende de la característica de la sustancia y no del volumen.

$R = \rho \frac{L}{A}$, depende de la longitud, el área y de las características del material.

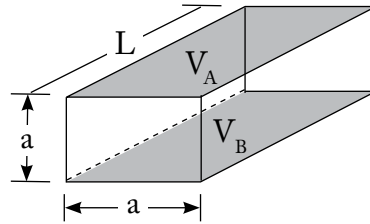
Para establecer la diferencia entre R y ρ , la figura 6.10 muestra la medición de la resistencia R , que varía de acuerdo con los puntos en los que se mida, esto es, los puntos A y B (V_A y V_B). En la medición que se realiza en la figura 6.10(a), la resistencia es R_1 ; mientras que, en la medición que se realiza en la figura 6.10(b), la resistencia es R_2 . A pesar de que se trata del mismo material en características y volumen, las dos resistencias son diferentes, es decir, R depende entre qué puntos se está midiendo y depende de la longitud y el área.

$$R_1 = \rho \frac{L}{a^2}$$

$$R_2 = \rho \frac{a}{aL} = \rho \frac{1}{L}$$



(a)



(b)

Figura 6.10. Formas de medir la resistencia R del material (a) y (b)

Conductividad.- La conductividad es el inverso de la resistividad y se lo representa con el símbolo σ y su unidad es el mho. La conductividad es la capacidad que tiene un material para conducir las cargas, es intrínseca de todo material; mientras que la resistividad es la limitación que presenta el material al paso de la corriente, también es intrínseca del material.

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{A}$$

6.7 Coeficiente de temperatura para la resistividad

La resistividad ρ es propia de cada material y varía con la temperatura. La ecuación (6-3) representa la resistividad variando con la temperatura.

$$\frac{d\rho}{\rho_0} = \alpha \, dT \quad (6-3)$$

Donde:

α = constante de temperatura de la resistividad, y su unidad es (1/°C).

ρ = resistividad final, y su unidad (Ω -m)

ρ_0 = resistividad inicial

T = temperatura, y su unidad (°C)

$$d\rho = \rho_0 \alpha \, dT$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} d\rho = \int_{T_0}^T \rho_0 \alpha \, dT$$

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 \alpha (T - T_0)$$

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T) \quad (6-4)$$

Con la ecuación (6-4), podemos calcular la resistividad final, conociendo la resistividad inicial y la temperatura inicial y final. En la tabla 6.1, se presenta algunos valores de la resistividad (ρ_0) y el coeficiente de temperatura para $T_0 = 20^\circ\text{C}$ para algunos metales.

Material	Resistividad ρ (Ohm-m)	Coefficiente de temperatura α ($1/^\circ\text{C}$)
Aluminio (Al)	2.8×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Cobre (Cu)	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Hierro (Fe)	1.0×10^{-7}	5.0×10^{-3}
Níquel (Ni)	7.8×10^{-8}	6.0×10^{-3}
Plata (Ag)	1.6×10^{-8}	3.8×10^{-3}

Tabla 6.1. Resistividad y coeficiente de temperatura para algunos materiales (Resnick, Halliday y Krane, 2006, p. 666)

6.8 Disipación de energía en una resistencia

Los electrones avanzan con una velocidad constante de arrastre V_d ; por consiguiente, no ganan energía cinética. La energía potencial eléctrica que pierde se transmite a la resistencia como calor. En una escala microscópica, esto puede interpretarse considerando que los choques entre los electrones y la red aumentan la amplitud de las vibraciones térmicas de la red; en una escala macroscópica, esta corresponde a un aumento de temperatura. Este efecto, que es termodinámicamente irreversible, se llama calentamiento por el efecto Joule.

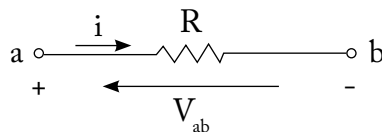


Figura 6.11. Potencia en la resistencia R , con los parámetros de la ley de Ohm

Deducción de la formula de potencia.- Al mover los electrones de un punto a otro, se está realizando un trabajo; entonces:

$$dW = Vdq$$

Si dividimos para el tiempo ambas ecuaciones, tenemos:

$$\frac{dW}{dt} = V \frac{dq}{dt}$$

$P = Vi$, es válida para materiales óhmicos y no óhmicos.

$$P = \frac{dW}{dt} \left[\frac{\text{Joule}}{\text{Seg}} \right] = \text{Watt} \quad P = \text{Potencia}$$

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad V = R i$$

$$P = V i = (R i) i = i^2 R$$

$$P = i^2 R, \quad P = \frac{V^2}{R}, \text{ es válido solo para conductores óhmicos}$$

6.9 Ejercicios de aplicación (problemas resueltos del capítulo 6)

Problema 6.1. Un conductor de hierro (Fe) tiene una longitud de 10 cm y sección transversal de 1 mm^2 . Calcular a qué temperatura se duplica su resistencia (ver figura 6.12).

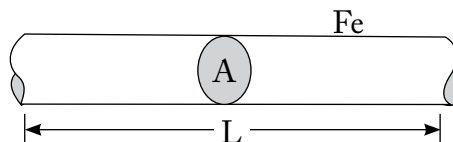


Figura 6.12. Conductor cilíndrico

Solución:

La resistencia R_1 a 20°C es $R_1 = \rho_0 \frac{L}{A}$, despejando:

$$\frac{L_1}{A_1} = \frac{R_1}{\rho_0} \quad (6-5)$$

Queremos saber a qué temperatura se duplica la resistencia.

R_2 = resistencia a una temperatura final T

R_1 = resistencia a una temperatura inicial T_0

$R_3 = 2R_1$, por dato del problema

$$R_2 = \rho \frac{L_2}{A_2}, \text{ despejando:}$$

$$\frac{L_2}{A_2} = \frac{R_2}{\rho} \quad (6-6)$$

Al duplicarse la resistencia, la longitud y el área no varían; entonces, la ecuación (6-5) es igual a la ecuación (6-6).

$$\frac{R_1}{\rho_0} = \frac{R_2}{\rho}, \text{ pero } R_2 = 2R_1, \text{ reemplazando valores, tenemos:}$$

$$R_1 \rho = 2 \rho_0 R_1$$

$$\rho = 2 \rho_0, \text{ pero } \rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

$$\rho_0 (1 + \alpha \Delta T) = 2 \rho_0$$

$$1 + \alpha (T - T_0) = 2$$

$$\alpha (T - T_0) = 1$$

$$T = \frac{1}{\alpha} + T_0$$

$$T = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} + 20 = 220 \text{ } ^\circ\text{C},$$

Entonces, la resistencia se duplica cuando la temperatura ha alcanzado los 220°C, a esta temperatura el material no se deforma, manteniendo constante su longitud y área.

Problema 6.2. Se desea calentar una tasa de café de 200 cm³ con un calentador de inmersión, desde 20 °C hasta 90 °C, en 0.5 minutos. a) ¿Cuántas calorías necesitan? b) ¿Cuánta potencia se requiere? c) ¿Cuánta corriente fluye por el calentador a 120 voltios? d) Si el material del que está hecha la resistencia es de hierro y tiene una sección transversal de 1 mm², ¿cuál debe ser la longitud de la resistencia?

Datos:

Volumen = 200 cm ³	a) Q=?
$\Delta T = (90 - 20) \text{ } ^\circ\text{C} = 70 \text{ } ^\circ\text{C}$	b) P=?
$\Delta t = 30 \text{ seg}$	c) i=?
$\rho_{\text{Fe}} = 1 \times 10^{-7} \text{ } (\Omega - \text{m})$	d) L=?
$\alpha_{\text{Fe}} = 5 \times 10^{-3} \text{ } (1/^\circ\text{C})$	
$A = 1 \text{ mm}^2 = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$	

Solución:

$$\text{a) } Q = m C \Delta T$$

$$\gamma = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \gamma V = \frac{1 \text{ gr}}{\text{cm}^3} (200 \text{ cm}^3) = 200 \text{ gr}$$

$$Q = (200 \text{ gr}) \left(\frac{1 \text{ cal}}{^{\circ}\text{Cgr}} \right) (70^{\circ}\text{C})$$

$$Q = 14000 \text{ cal}$$

$$\text{b) } Q = W$$

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{14000 \text{ cal}}{30 \text{ seg}} \times \frac{4.18 \text{ Joule}}{1 \text{ cal}} = 1950.7 \frac{\text{Joule}}{\text{seg}}$$

$$P = 1950 \text{ Watts}$$

$$\text{c) } P = Vi$$

$$i = \frac{P}{V} = \frac{1950.7 \text{ watts}}{120 \text{ Voltios}} = 16.256 \text{ A.}$$

$$i = 16.256 \text{ A}$$

$$\text{d) } \rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta T)$$

$$\rho = 1 \times 10^{-7} [1 + 5 \times 10^{-3} (70)]$$

$$\rho = 1.35 \times 10^{-7} (\Omega - \text{m})$$

$$P = Vi$$

$$P = i^2 R$$

$$R = \frac{P}{i^2} = \frac{1950.7}{(16.256)^2} = 7.38 \Omega$$

$$R = 7.4 \Omega$$

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

$$L = \frac{1}{\rho} RA$$

$$L = \frac{(7.4)(1 \times 10^{-6})}{1.35 \times 10^{-7}} = 54.81 \text{ m}$$

$$L = 54.81 \text{ m}$$

Problema 6.3. “Se aplica la misma diferencia de potencial a un alambre de cobre y a un alambre de hierro de la misma longitud. a) ¿Cuál debe ser la relación de sus radios para que por los dos alambres pase la misma corriente? b) ¿Puede hacerse igual la densidad de corriente dando valores adecuados a los radios?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 976).

Solución:

Cálculo del radio del alambre de cobre.

$$R_{Cu} = \rho_{Cu} \frac{L_{Cu}}{A_{Cu}} \qquad A = \pi r^2$$

$$R_{Cu} = \rho_{Cu} \frac{L_{Cu}}{\pi r^2}$$

$$r_{Cu} = \sqrt{\rho_{Cu} \frac{L_{Cu}}{\pi R_{Cu}}}$$

Cálculo del radio del alambre de hierro

$$r_{\text{Fe}} = \sqrt{\rho_{\text{Fe}} \frac{L_{\text{Fe}}}{\pi R_{\text{Fe}}}}$$

Se aplica la misma diferencia de potencial a los dos alambres. Se quiere que por los dos alambres pase la misma corriente.

$$V_{\text{Cu}} = i_{\text{Cu}} R_{\text{Cu}}$$

$$V_{\text{Fe}} = i_{\text{Fe}} R_{\text{Fe}}$$

$$V_{\text{Cu}} = V_{\text{Fe}}$$

$$i_{\text{Cu}} = i_{\text{Fe}}$$

$$R_{\text{Cu}} = R_{\text{Fe}}$$

$$L_{\text{Cu}} = L_{\text{Fe}}$$

$$a) \quad \frac{r_{\text{Fe}}}{r_{\text{Cu}}} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{Fe}} L_{\text{Fe}} \pi R_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Cu}} L_{\text{Cu}} \pi R_{\text{Fe}}}} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{Fe}}}{\rho_{\text{Cu}}}} = \sqrt{\frac{1 \times 10^{-7}}{1.7 \times 10^{-8}}}$$

$$\frac{r_{\text{Fe}}}{r_{\text{Cu}}} = 2.425$$

b) No, porque el único caso en que la densidad de corriente es igual es cuando los radios son iguales.

Problema 6.4. “Se establece una corriente en un tubo de descarga de gas al aplicar una diferencia de potencial suficientemente elevada entre los dos electrodos del tubo. El gas se ioniza; los electrones se mueven hacia la terminal positiva. ¿Cuál es la magnitud y sentido de la corriente en un tubo de descarga de hidrógeno en el cual pasan por una sección transversal del tubo 3.1×10^{18} electrones y 1.1×10^{18} protones cada segundo?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 976).

Solución:

$$i = \frac{q}{t} = \frac{(3.1 \times 10^{18} + 1.1 \times 10^{18})(1.6 \times 10^{-19})}{1} = 0.672 \text{ A}$$

$$q = (e + p) e^-$$

Donde: e = número de electrones

p = número de protones

e^- = carga del electrón

$e^- = 1.6 \times 10^{-19}$ coul

$e = 3.1 \times 10^{18}$ electrones

$p = 1.1 \times 10^{18}$ protones

$t = 1$ segundo

$$i = 0,672 \text{ A}$$

Problema 6.5. “La banda de un generador electrostático tiene 50 cm de ancho y se mueve a razón de 30 m/s. La banda lleva la carga a la esfera con una rapidez correspondiente a 1×10^{-4} amp. Calcular la densidad de carga en la banda” (Resnick y Halliday, 1977, p. 976).

Solución:

$$j = \frac{\lambda}{d} \Rightarrow \text{densidad de carga}$$

$$j = \frac{i}{A} \Rightarrow \text{densidad de corriente}$$

$$\lambda = \frac{i}{V_d} = \frac{1 \times 10^{-4} \text{ Amp}}{30 \frac{\text{m}}{\text{seg}}} = 3.333 \times 10^{-6} \frac{\text{coul}}{\text{m}}$$

$$j = \frac{\lambda}{d} = \frac{3.333 \times 10^{-6} \frac{\text{coul}}{\text{m}}}{0.5 \text{ m}} = 6.67 \times 10^{-6} \frac{\text{coul}}{\text{m}^2}$$

$$j = 6.67 \times 10^{-6} \frac{\text{coul}}{\text{m}^2}$$

Problema 6. “Una barra cuadrada de aluminio (Al) tiene 1.0 m de largo y 5.0 mm de lado. a) ¿Cuál es la resistencia entre sus extremos? b) ¿Cuál debe ser el diámetro de una barra de cobre (Cu) circular de 1.0 m para que tenga la misma resistencia?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 976) (figura 6.13 y 6.14).

Solución:

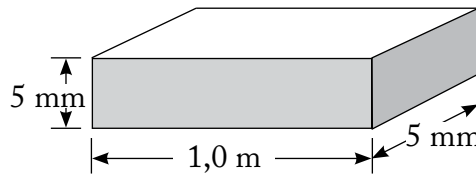


Figura 6.13. Barra cuadrada de aluminio

$$5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}$$

$$A = (0.005\text{m})^2 = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

La resistividad del aluminio ρ_{Al} es:

$$\rho_{\text{Al}} = 2.8 \times 10^{-8} \Omega\text{-m}$$

a) La resistencia del aluminio entre sus extremos es:

$$R = \rho_{\text{Al}} \frac{L}{A} = 2.8 \times 10^{-8} \frac{1.0}{2.5 \times 10^{-5}} = 1.12 \times 10^{-3} \Omega$$

$$R = 1.12 \times 10^{-3} \Omega$$

b)

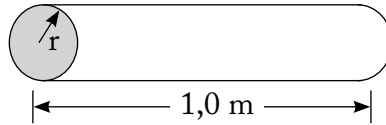


Figura 6.14. Barra cilíndrica de cobre

$$R_{Al} = R_{cu} = R$$

$$\rho_{cu} = 1.7 \times 10^{-8} \text{ } (\Omega \cdot \text{m})$$

$$A_{cu} = \pi r^2 \qquad L = 1.0 \text{ m}$$

$$R = \rho_{cu} \frac{L}{\pi r^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{\rho_{cu} L}{R \pi}} = \sqrt{\frac{(1.7 \times 10^{-8})(1)}{(1.12 \times 10^{-3})\pi}} = 2.1981 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$r = 2.2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$D = 2 r = 2(2.2 \times 10^{-3}) = 4.4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$D = 4.4 \text{ mm}$$

Problema 6.7. “El enrollamiento de cobre de un motor tiene una resistencia de 50Ω a 20°C , cuando el motor está quieto. Después de estar trabajando durante varias horas, la resistencia se eleva a 58Ω . ¿Cuál es la temperatura del enrollamiento?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 977).

Solución:

$$R_0 = \rho_0 \frac{L}{A} \rightarrow \frac{L}{A} = \frac{R_0}{\rho_0} \quad (6-7)$$

$$R_f = \rho \frac{L}{A} \rightarrow \frac{L}{A} = \frac{R_f}{\rho} \quad (6-8)$$

Donde:

R_0 = resistencia inicial

R_f = resistencia final

ρ_0 = resistividad inicial

ρ = resistividad final

La ecuación (6-7) es igual a la ecuación (6-8); entonces:

$$\frac{R_0}{\rho_0} = \frac{R_f}{\rho}$$

$$\frac{R_0}{\rho_0} = \frac{R_f}{\rho_0 (1 + \alpha \Delta T)}$$

$$1 + \alpha \Delta T = \frac{R_f}{R_0}$$

$$\alpha \Delta T = \frac{R_f}{R_0} - 1$$

$$\alpha(T_f - T_0) = \frac{R_f}{R_0} - 1$$

$$T_f = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_f}{R_0} - 1 \right) + T_0$$

$$T_f = \frac{1}{3.9 \times 10^{-3}} \left(\frac{58}{50} - 1 \right) + 20 = 61.026 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_f = 61 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Problema 6.8. “En una resistencia se desarrolla calor a razón de 100 watts cuando la intensidad de la corriente es de 3.0 A. ¿Cuál es la resistencia en ohm?” (Resnick y Halliday, 1977, p.977).

Solución:

$$P = V i$$

$$V = i R$$

$$P = (iR) (i)$$

$$P = i^2 R$$

$$R = \frac{P}{i^2} = \frac{100}{(3.0)^2} = \frac{100}{9} = 11.111 \text{ } \Omega$$

$$R = 11.111 \text{ } \Omega$$

Problema 6.9. “Se aplica una diferencia de potencial de 1.0 volt a un alambre de cobre No. 18, de 30.48 m de largo (100 pies) y 0.00102 m de diámetro (0.040 plg). Calcúlese: a) la corriente, b) la densidad de corriente; c) la intensidad de campo eléctrico y d) la rapidez de calentamiento por el efecto de Joule” (Resnick y Halliday, 1977, p. 977).

Solución:

a) Calcular i.

$$R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{L}{\pi r^2}$$

$$R = 1.7 \times 10^{-8} \frac{30.48}{\pi (0.00051)^2} = 0.63412$$

$$R = 0.63412 \ \Omega$$

$$V = iR$$

$$i = \frac{V}{R} = \frac{1}{0.63412} = 1.58 \text{ A}$$

$$i = 1.58 \text{ A}$$

b) Calcular la densidad de corriente j.

$$j = \frac{i}{A} = \frac{1.58}{\pi (0.00051)^2} = 1933601$$

$$j = 1.93 \times 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

c) Cálculo de la intensidad del campo eléctrico E:

$$\rho = \frac{E}{j}$$

$$E = \rho j = (1.7 \times 10^{-8})(1.93 \times 10^6) = 0.03281 \frac{\text{N}}{\text{coul}}$$

$$E = 3.28 \times 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{coul}}$$

d) Cálculo de la Potencia P

$$P = V i$$

$$P = (1)(1.58) = 1.58 \text{ Watts}$$

$$P = 1.58 \text{ Watts}$$

Problema 6.10. “Un calentador de Nichrome disipa 500 watts cuando la diferencia de potencial aplicada es de 110 volt y la temperatura del alambre es de 800 °C. ¿Cuánta potencia disiparía si la temperatura del alambre se conserva a 200 °C metiéndolo en un baño enfriador de aceite? La diferencia de potencial aplicada permanece igual; α para el Nichrome es aproximadamente de $4 \times 10^{-4} (\text{°C})^{-1}$ ” (Resnick y Halliday, 1977, p. 978).

Solución:

$$P_o = 500 \text{ watts}$$

$$V = 110 \text{ V}$$

$$T_o = 800 \text{ °C}$$

$$T_f = 200 \text{ °C}$$

$$P_f = ?$$

$$\alpha = 4 \times 10^{-4} / \text{°C}$$

$$P_o = V i_o$$

$$i_o = \frac{P_o}{V} = \frac{500}{110} = 4.5454 \text{ A}$$

$$i_o = 4.5454 \text{ A}$$

$$V = i_o R_o$$

$$R_o = \frac{V}{i_o} = \frac{110}{4.5454} = 24.20$$

$$R_o = 24.2 \ \Omega$$

$$R_o = \rho_o \frac{L}{A} \rightarrow \frac{L}{A} = \frac{R_o}{\rho_o} \quad (6-9)$$

$$R_f = \rho_f \frac{L}{A} \rightarrow \frac{L}{A} = \frac{R_f}{\rho_f} \quad (6-10)$$

Donde:

R_o = resistencia inicial

R_f = resistencia final

ρ_o = resistividad inicial

ρ_f = resistividad final

P_o = potencia inicial

P_f = potencia final

i_o = corriente inicial

i_f = corriente final

La ecuación (6-9) es igual a la ecuación (6-10), entonces,

$$\frac{R_o}{\rho_o} = \frac{R_f}{\rho_f}$$

$$\rho_f = \rho_o (1 + \alpha \Delta T)$$

$$\frac{R_o}{\rho_o} = \frac{R_f}{\rho_o (1 + \alpha \Delta T)}$$

$$R_o (1 + \alpha \Delta T) = R_f$$

$$R_f = R_o \left[1 + \alpha (T_f - T_o) \right]$$

$$R_f = 24.2 \left[1 + 4 \times 10^{-4} (200 - 800) \right] = 18.392 \ \Omega$$

$$R_f = 18.39 \ \Omega$$

$$P_f = V i_f$$

$$V = i_f R_f$$

$$i_f = \frac{V}{R_f}$$

$$P_f = \frac{V^2}{R_f} = \frac{(110)^2}{18.39} = 657.97 \text{ Watts}$$

$$P_f = 657.97 \text{ Watts}$$

CAPÍTULO 7 CIRCUITOS RESISTIVOS

7.1 Fuerza electromotriz

Según Resnick y Halliday (1977), los dispositivos que mantienen una diferencia de potencial entre dos puntos se llaman fuentes de fuerza electromotriz (fem) (p. 979). Si la corriente es constante, este dispositivo (figura 7.1) lleva el nombre de batería o fuente. Es la encargada de mantener una diferencia de potencial; por lo tanto, existe un flujo de cargas. Lo que caracteriza a esta batería es la fuerza electromotriz (fem). Entre los dispositivos capaces de mantener una diferencia de potencial tenemos: la pila química, la celda solar, la celda electroquímica y el generador electromagnético. En la figura 7.2, se representa dos de estos dispositivos, esto es, la batería y la pila.

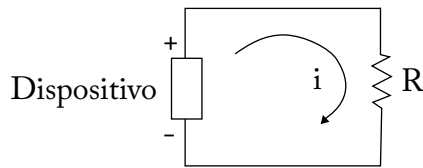


Figura 7.1. Dispositivo (fem)

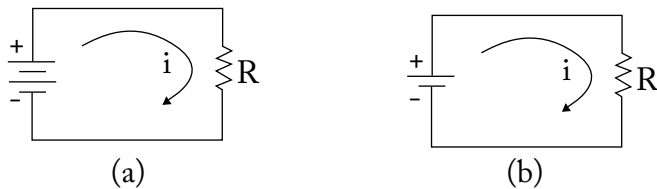


Figura 7.2. Representación simbólica de un dispositivo (fem):
(a) batería, (b) pila química

Se dice que el circuito está abierto (figura 7.3 (a)), cuando no circula corriente, es decir, la corriente es igual a cero. Podemos decir también que la resistencia es infinita (muy grande); entonces, justificamos con la ley de Ohm como sigue:

$$V = iR \rightarrow i = \frac{V}{R} = \frac{V}{\infty} = 0$$

Se dice que existe un cortocircuito (figura 7.3(b)), cuando la resistencia es igual a cero, entonces, la corriente es infinita (en este caso es la corriente máxima que dispone la fuente); esto es:

$$V = iR \rightarrow i = \frac{V}{R} = \frac{V}{0} = \infty$$

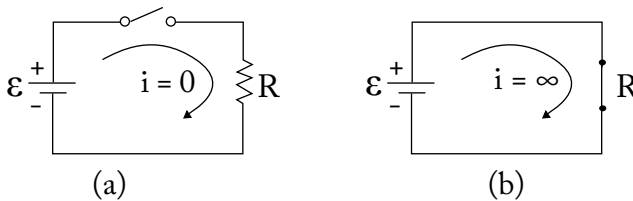


Figura 7.3. (a) Circuito abierto, (b) cortocircuito

Para demostrar la generación de la fuerza electromotriz, en la figura 7.4, seguimos el procedimiento siguiente: para mover una carga desde el punto negativo hasta un punto positivo, se debe realizar trabajo. A continuación, planteamos las ecuaciones que justifican el proceso.

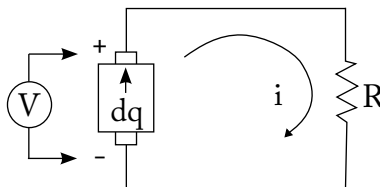


Figura 7.4. Generación de la fuerza electromotriz (fem)

$$p = \frac{dw}{dt} = vi = v \frac{dq}{dt}$$

$$p = v \frac{dq}{dt} \quad (7-1)$$

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt}$$

$$p = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} \quad (7-2)$$

Comparando las ecuaciones (7-1) = (7-2), tenemos:

$$\frac{dw}{dq} = v \quad \rightarrow \quad \frac{dw}{dq} = \mathcal{E} = \text{fem}$$

$$p = \mathcal{E}i$$

$$\mathcal{E} = \frac{dw}{dq} = \left[\frac{\text{joule}}{\text{coul}} \right] = [\text{volt}]$$

$$V = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = [\text{volt}]$$

La diferencia entre \mathcal{E} y V es que solamente la fuerza electromotriz (\mathcal{E}) es capaz de mover una carga en un circuito cerrado. También podemos decir que la *fem* es la generación de un potencial eléctrico, mientras que V es la medición de ese potencial.

$$V = -\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \text{Integral cerrada de línea}$$

7.2 Resistencia interna

En un circuito eléctrico (figura 7.5), tenemos resistencia externa R y una resistencia interna R_1 , la cual se encuentra en el interior del generador. La resistencia total del circuito es $R_T = R + R_1$, entonces la potencia total que entrega la fuente (fem) se presenta en las ecuaciones (7-3) y (7-4).

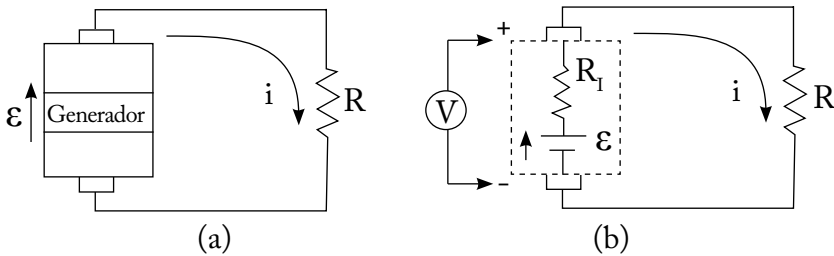


Figura. 7.5. (a) Dispositivo generador, (b) dispositivo generador con su resistencia interna R_1

$$p = i^2 R_T \quad (7-3)$$

$$p = \mathcal{E}i \quad (7-4)$$

Las ecuaciones (7-3) = (7-4)

$$\mathcal{E}i = i^2 R_T$$

$$\mathcal{E} = i(R + R_1)$$

$$\mathcal{E} = iR + iR_1$$

$$\mathcal{E} - iR_1 = iR$$

Lo único aprovechable de la fuente es el término $iR = V$, y el término iR_1 se pierde en el interior de la fuente. La figura 7.6 muestra la gráfica del voltaje V versus corriente i .

Una fuente ideal implica que su resistencia interna es aproximadamente cero; entonces:

$$R_I \cong 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{E} = V \quad \rightarrow \quad \mathcal{E} = iR$$

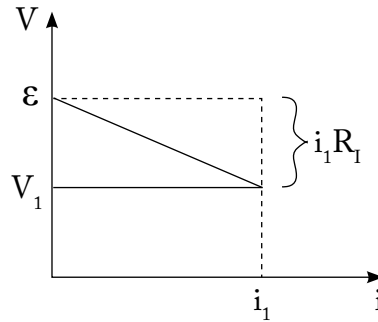


Figura 7.6. Gráfica de V vs. i en los bordes de un generador

7.3 Ley de las corrientes de Kirchhoff

Antes de entrar a enunciar las leyes de Kirchhoff, se procederá a definir los términos siguientes:

Elemento es aquel que une dos puntos (nodos) y puede ser una fuente de voltaje, una fuente de corriente, una resistencia, un capacitor, un inductor, etc. Un elemento puede ser activo o pasivo.

Elementos activos son aquellos que entregan una energía finita en un período que puede ser infinito, como por ejemplo: las fuentes independientes de voltaje y de corriente.

Elementos pasivos son aquellos que no pueden entregar una energía finita en un tiempo infinito, como por ejemplo: inductor, capacitor, resistencia.

Nodo es aquel que une dos o más elementos.

Rama es un camino que contiene un elemento simple y conecta un nodo con otro nodo cualquiera.

Trayectoria es aquella que une dos o más nodos sin que se repita ningún nodo.

Lazo es una trayectoria cerrada, esto es: el nodo que inicia es el mismo que termina.

Malla es un lazo que no contiene elementos en su interior.

La ley de las corrientes de Kirchhoff se aplica a nodos y se define como sigue: “La suma algebraica de las corrientes en un nodo es igual a cero”. Se asume un signo a la dirección de la corriente y podemos citar dos casos.

Caso 1. Cuando la corriente se dirige hacia al nodo, es positiva y, cuando la corriente sale del nodo, es negativa.

Caso 2. Cuando la corriente se dirige hacia al nodo, es negativa, y cuando la corriente sale del nodo, es positiva.

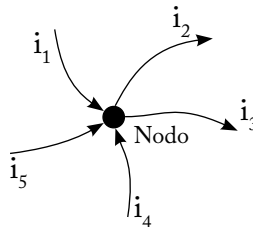


Figura 7.7. Corrientes en un nodo eléctrico

El nodo (figura 7.7) es el punto al cual entran y salen las corrientes. Aplicando la ley de las corrientes de Kirchhoff (LCK) y utilizando el caso 1, tenemos:

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

7.4 Ley de los voltajes de Kirchhoff

La ley de los voltajes de Kirchhoff se aplica a lazos y se define como sigue: “La suma algebraica de todos los voltajes tomados en una misma dirección, alrededor de un sendero cerrado (lazo) es igual a cero”.

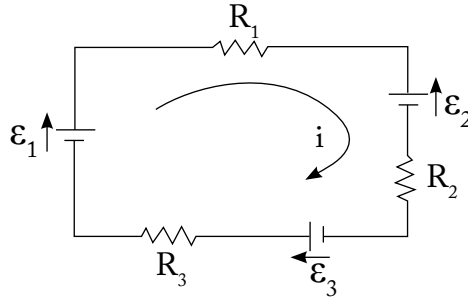


Figura 7.8. Lazo formado por seis elementos

En el circuito serie de la figura 7.8, existen tres fuentes de voltaje (fem) y no se conocen los valores, razón por la cual no se puede saber en qué dirección va a circular la corriente. En este caso, se asume una dirección ya sea a favor o en contra de las manecillas del reloj. Una vez seleccionado cualquiera de estos casos y una vez encontrado el valor de la corriente, si esta es positiva, significa que la dirección que seleccionó es la correcta; pero si el valor de la corriente sale negativo, significa que la dirección que seleccionó no es la correcta.

En la figura 7.8, existen tres fuentes de voltaje (fem) y desconocemos su valor, por lo que es imposible saber la dirección que circula la corriente. En este caso, seleccionamos la dirección de la corriente a favor de las manecillas del reloj. La corriente i , al pasar por un elemento resistivo, polariza de + a -; al pasar la corriente i por la resistencia R_1 este polariza de + a - y se crea el voltaje V_1 (figura 7.9 (a)). Aplicando la ley de Ohm a todos los elementos pasivos, tenemos como resultado el circuito de la figura 7.9(b).

$$\begin{aligned} V_1 &= R_1 i \\ V_2 &= R_2 i \\ V_3 &= R_3 i \end{aligned}$$

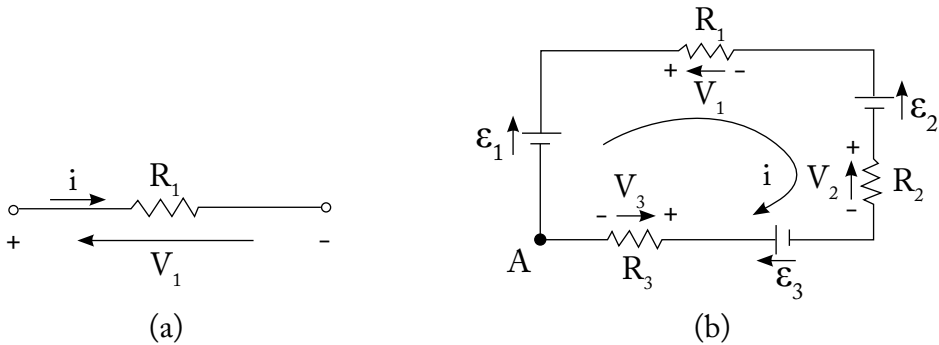


Figura 7.9. (a) Ley de Ohm en la resistencia R_1 ,
(b) ley de Ohm en todos los elementos pasivos

Aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK), en el circuito de la figura 7.9(b), y la dirección en la cual nos movemos es el sentido de la corriente i (tomamos un sendero cerrado, partimos de A y nos movemos en el sentido de las manecillas del reloj que coinciden con la dirección de la corriente, en este caso, y llegamos al mismo punto A), planteamos la ecuación, considerando que, al pasar por cada elemento activo o pasivo, en la ecuación, ponemos el primer signo que vemos.

$$-\mathcal{E}_1 + V_1 + \mathcal{E}_2 + V_2 - \mathcal{E}_3 + V_3 = 0$$

$$-\mathcal{E}_1 + R_1 i + \mathcal{E}_2 + R_2 i - \mathcal{E}_3 + R_3 i = 0$$

$$-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = -R_1 i - R_2 i - R_3 i, \text{ ley de la conservación de la energía}$$

7.5 Asociación de resistencias

7.5.1 Resistencias conectadas en serie

Se dice que dos o más resistencias se encuentran conectadas en serie cuando por ellas circulan la misma corriente.

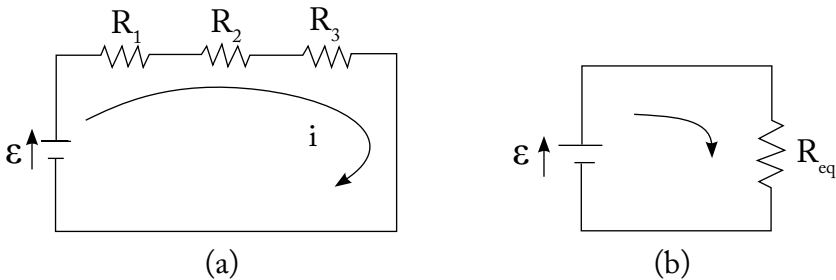


Figura 7.10. (a) Resistencias conectadas en serie,
(b) resistencia equivalente del circuito (a)

En la figura 7.10(a), las resistencias se encuentran en serie; queremos determinar una sola resistencia equivalente, como se muestra en la figura 7.10(b), para lo cual aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff en el circuito de la figura 7.10(a).

$$-\mathcal{E} + R_1 i + R_2 i + R_3 i = 0$$

$$-\mathcal{E} + i (R_1 + R_2 + R_3) = 0$$

$$\mathcal{E} = i (R_1 + R_2 + R_3)$$

$$\frac{\mathcal{E}}{i} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\mathcal{E} = Ri \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{i} = R$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_{\text{eq}} = R$$

$$R_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n R_i$$

7.5.2 Resistencias conectadas en paralelo

Dos o más resistencias se encuentran conectadas en paralelo cuando todas sus resistencias tienen la misma diferencia de potencial. En la figura 7.11(a), las resistencias R_1 , R_2 y R_3 se encuentran en paralelo. Queremos determinar una sola resistencia equivalente, como la que se muestra en la figura 7.11(b), para lo cual aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo A del circuito de la figura 7.11 (a). Asumimos que las corrientes que entran al nodo son positivas y las que salen del nodo son negativas; esto es:

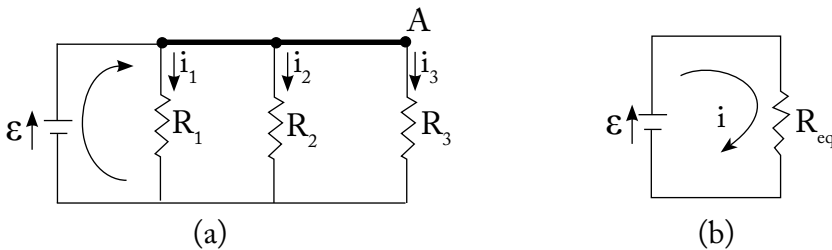


Figura 7.11. (a) Resistencias conectadas en paralelo,
(b) resistencia equivalente del circuito (a)

$$i - i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \tag{7-5}$$

En cada resistencia, aplicamos la ley de Ohm:

$$\mathcal{E} = i_1 R_1 \Rightarrow i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$$

$$\mathcal{E} = i_2 R_2 \Rightarrow i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2}$$

$$\mathcal{E} = i_3 R_3 \Rightarrow i_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_3}$$

Reemplazando en la ecuación (7-5), tenemos:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2} + \frac{\mathcal{E}}{R_3}$$

$$i = \mathcal{E} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$\frac{i}{\mathcal{E}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{i}{\mathcal{E}} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{eq}}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

7.5.3 Transformación delta-estrella ($\Delta \rightarrow Y$)

La conexión delta (Δ) está formada por las resistencias R_a , R_b y R_c (figura 7.12(a)). La transformamos a una conexión Y, la misma que está formada por las resistencias equivalentes R_1 , R_2 y R_3 (figura 7.12(b)), estos valores se calculan utilizando las ecuaciones que se muestran a continuación:

$$R_1 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

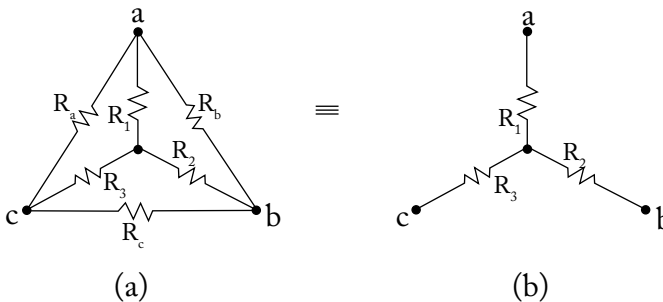


Figura 7.12. (a) Transformación de Δ a Y,
(b) configuración estrella (Y)

7.6 Método de las corrientes de nodos

Considerando la figura 7.13, primeramente, identificamos los nodos A, B y C, para luego asignar las corrientes en cada ramal de los nodos, especialmente las corrientes que circulan por cada resistencia; esto es: i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 ,

e i_6 . Luego, aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) en cada nodo, considerando el caso 1 para los signos de las corrientes.

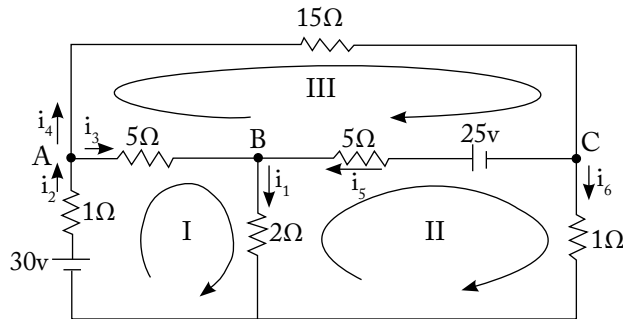


Figura 7.13. Circuito con tres nodos (A, B y C) y tres lazos (I, II, III)

NODO A (LCK)

$$i_2 - i_3 - i_4 = 0 \quad (7-6)$$

NODO B (LCK)

$$i_3 + i_5 - i_1 = 0 \quad (7-7)$$

NODO C (LCK)

$$i_4 - i_5 - i_6 = 0 \quad (7-8)$$

A continuación, asignamos tres lazos; esto es: I, II y III. Luego, asignamos a cada lazo un sendero cerrado y tomamos en sentido de las manecillas del reloj. Finalmente, aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) a cada lazo; además, consideramos la ley de Ohm en cada resistencia.

Lazo I (LVK)

$$\begin{aligned} -30 + 1i_2 + 5i_3 + 2i_1 &= 0 \\ 30 &= 2i_1 + i_2 + 5i_3 \end{aligned} \quad (7-9)$$

Lazo II (LVK)

$$-2i_1 - 5i_5 + 25 + 1i_6 = 0$$

$$25 = 2i_1 + 5i_5 - i_6 \quad (7-10)$$

Lazo III (LVK)

$$15i_4 - 25 + 5i_5 - 5i_3 = 0$$

$$25 = -5i_3 + 15i_4 + 5i_5 \quad (7-11)$$

Tenemos seis ecuaciones y seis incógnitas; por lo tanto, el problema está resuelto. Pero despejar el valor de cada una de las corrientes i_1 , i_2 , i_3 , i_4 , i_5 , e i_6 es complicado. Existe un método más sencillo para resolver este problema, este método es el de mallas que lo desarrollaremos a continuación.

7.7 Métodos de las corrientes de malla

Tomando en cuenta la figura 7.14, existen tres mallas (I, II y III); a cada malla, le asignamos una corriente de malla (I_1 , I_2 e I_3) y luego, aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff.

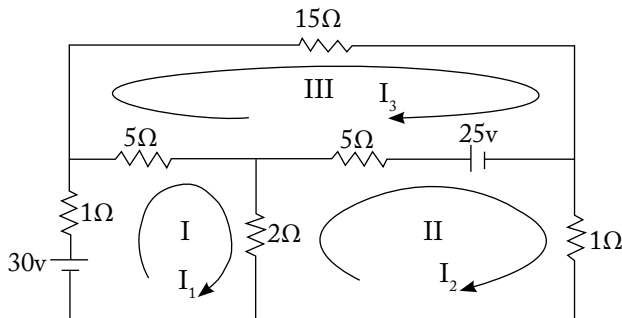


Figura 7.14. Circuito con tres corrientes de malla

MALLA I (LVK)

$$\begin{aligned}
 -30 + 1I_1 + 5(I_1 - I_3) + 2(I_1 - I_2) &= 0 \\
 -30 + I_1 + 5I_1 - 5I_3 + 2I_1 - 2I_2 &= 0 \\
 30 &= 8I_1 - 2I_2 - 5I_3
 \end{aligned} \tag{7-12}$$

MALLA II (LVK)

$$\begin{aligned}
 2(I_2 - I_1) + 5(I_2 - I_3) + 25 + 1I_2 &= 0 \\
 2I_2 - 2I_1 + 5I_2 - 5I_3 + 25 + 1I_2 &= 0 \\
 25 &= 2I_1 - 8I_2 + 5I_3
 \end{aligned} \tag{7-13}$$

MALLA III (LVK)

$$\begin{aligned}
 15I_3 - 25 + 5(I_3 - I_2) + 5(I_3 - I_1) &= 0 \\
 15I_3 - 25 + 5I_3 - 5I_2 + 5I_3 - 5I_1 &= 0 \\
 25 &= -5I_1 - 5I_2 + 25I_3
 \end{aligned} \tag{7-14}$$

Tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas; por lo tanto, el problema está resuelto. Utilizamos el método de determinantes para hallar las tres corrientes de malla (I_1 , I_2 e I_3).

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & -2 & -5 \\ 25 & -8 & 5 \\ 25 & -5 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -2 & -5 \\ 2 & -8 & 5 \\ -5 & -5 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{30((-8 * 25) + 25) + 2((25 * 25) - (5 * 25)) - 5((-5 * 25) + (25 * 8))}{8((-8 * 25) + 25) + 2(50 + 25) - 5(-10 - 40)}$$

$$I_1 = 4.625 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 30 & -5 \\ 2 & 25 & 5 \\ -5 & 25 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -2 & -5 \\ 2 & -8 & 5 \\ -5 & -5 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{8((25 * 25) - (5 * 25)) - 30(50 + 25) - 5(50 + (25 * 5))}{-1000}$$

$$I_2 = -0.875 \text{ A}$$

Si queremos calcular el voltaje que cae en la resistencia de 2Ω (figura 7.15), procedemos como sigue:

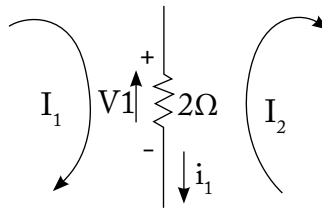


Figura 7.15. Corriente total que circula por la resistencia de 2Ω y es igual a $i_1 = I_1 - I_2$.

Por la resistencia de 2Ω circulan dos corrientes I_1 e I_2 . Tomamos una corriente resultante hacia abajo y la llamamos i_1 , esta corriente polariza a la resistencia de 2Ω de + a -, fijando un voltaje V_1 ; procedemos a calcular la corriente i_1 y luego el voltaje V_1 .

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 - I_2 \\ i_1 &= 4.625 - (-0.875) \\ i_1 &= 5.5 \text{ A} \\ V_1 &= 2i_1 \\ V_1 &= 2(5.5) \\ V_1 &= 11 \text{ V} \end{aligned}$$

A continuación, procedemos a calcular la corriente de malla I_3 :

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -2 & 30 \\ 2 & -8 & 25 \\ -5 & -5 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -2 & -5 \\ 2 & -8 & 5 \\ -5 & -5 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{8((-8 * 25) + (25 * 5)) + 2(50 + (25 * 5)) + 30(-10 - 40)}{-1000}$$

$$I_3 = 1,75 \text{ A}$$

Ahora estamos en condiciones de calcular las corrientes de nodos (figura 7.13) de una forma más fácil.

$$i_1 = I_1 - I_2 = 4,625 - (-0,875) = 5,5 \text{ A}$$

$$i_2 = I_1 = 4,625 \text{ A}$$

$$i_3 = I_1 - I_3 = 4,625 - (1,75) = 2,875 \text{ A}$$

$$i_4 = I_3 = 1,75 \text{ A}$$

$$i_5 = I_3 - I_2 = 1,75 - (-0,875) = 2,625 \text{ A}$$

$$i_6 = I_2 = -0,875 = -0,875 \text{ A}$$

7.8 Circuitos RC en serie

7.8.1 Proceso de carga de un condensador

El proceso de carga de un condensador es el siguiente: en la figura 7.16(a), cuando el circuito está abierto, obtenemos los valores de las condiciones iniciales; esto es, $t = 0$, $i = 0$, $q = 0$; luego, en el instante que cerramos el circuito (figura 7.16 (b)), tenemos los siguientes valores: $i = i_{\text{máx}}$, $q = 0$. Posteriormente, aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff. Considerar que $i = i(t)$.

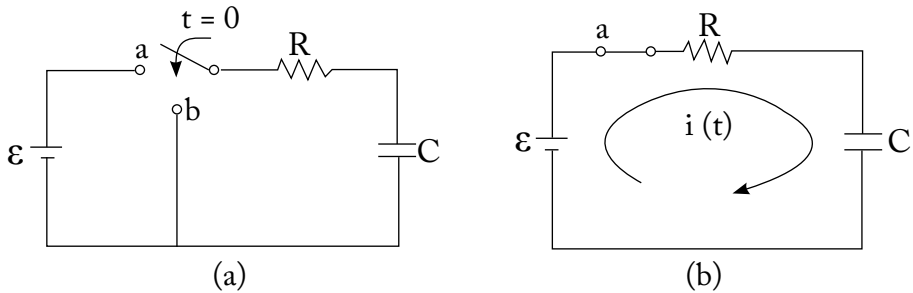


Figura 7.16. Proceso de carga circuito RC con fuente.
(a) Circuito abierto, (b) circuito cerrado

$$-\mathcal{E} + iR + V_c = 0 \rightarrow V_c = \frac{q}{C} \rightarrow -\mathcal{E} + iR + \frac{q}{C} = 0, \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\mathcal{E} = iR + \frac{q}{C} \tag{7-15}$$

$$\mathcal{E} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \rightarrow \mathcal{E}C = RC \frac{dq}{dt} + q$$

$$RC \frac{dq}{dt} = \mathcal{E}C - q, \text{ haciendo un cambio de variable y derivando con}$$

$$\text{respecto al tiempo tenemos: } w = \mathcal{E}C - q \rightarrow \frac{dw}{dt} = -\frac{dq}{dt} \rightarrow RC \frac{dq}{dt} = w$$

$$\rightarrow -RC \frac{dw}{dt} = w, \text{ separando las variables e integrando, tenemos:}$$

$$\int \frac{dw}{w} = -\int \frac{dt}{RC} \rightarrow \ln w = -\frac{t}{RC} + K, \text{ siendo } K \text{ una constante de}$$

integración, para poder despejar el valor de w utilizamos un artificio matemático; esto es:

$$e^{\ln w} = e^{-\frac{t}{RC} + K} \rightarrow w = e^{-\frac{t}{RC}} e^K, \text{ pero } e^K = A \rightarrow w = A e^{-\frac{t}{RC}},$$

Se sustituye el valor de w :

$\mathcal{E} C - q = A e^{\frac{-t}{RC}}$, pero la variable q depende del tiempo, entonces $q = q(t)$. Reemplazando, tenemos:

$\mathcal{E} C - q(t) = A e^{-\frac{t}{RC}}$, utilizando las condiciones iniciales $t = 0, q = 0$, y reemplazando, tenemos:

$$\mathcal{E} C - 0 = A e^0 \rightarrow A = \mathcal{E} C$$

$$\mathcal{E} C - q(t) = \mathcal{E} C e^{-\frac{t}{RC}}, \text{ despejando } q(t)$$

$$q(t) = \mathcal{E} C - \mathcal{E} C e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t) = \mathcal{E} C (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Cuando el capacitor queda cargado completamente, la corriente se hace cero, es decir, ya no circula corriente por el capacitor, por lo que podemos calcular la carga máxima ($q_{\text{máx}}$) de la ecuación (7-15).

$$\mathcal{E} = iR + \frac{q}{C}, \text{ el producto } iR = 0, \text{ debido a que la corriente } i \text{ es cero.}$$

$$\mathcal{E} = \frac{q_{\text{máx}}}{C} \rightarrow q_{\text{máx}} = \mathcal{E} C$$

$$q(t) = q_{\text{máx}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{7-16}$$

Utilizando la ecuación (7-16), procedemos a graficar y vemos cómo varía el proceso de carga en el condensador, el cual se encuentra representado en la figura 7.17.

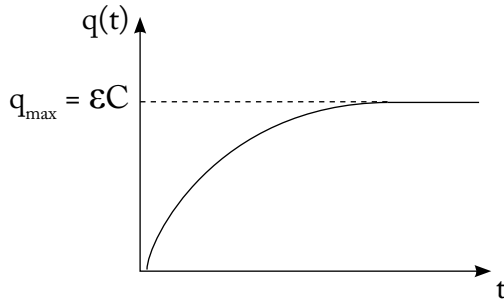


Figura 7.17. Proceso de carga $q(t)$ vs. t

Para calcular la corriente del capacitor, derivamos la ecuación (7-16);

esto es: $i = \frac{dq}{dt}$

$$i(t) = \frac{d}{dt}(q(t)) = \frac{d}{dt} q_{\max} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = q_{\max} (-e^{-\frac{t}{RC}}) \left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{q_{\max}}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$i(t) = i_{\max} e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow i_{\max} = \frac{q_{\max}}{RC} = \frac{\epsilon C}{RC} = \frac{\epsilon}{R}$, finalmente, la corriente en el condensador representa la ecuación (7-17).

$$i(t) = \frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \tag{7-17}$$

Utilizando la ecuación (7-17), procedemos a graficar y vemos cómo varía la corriente en el condensador, el cual se encuentra representado en la figura 7.18.

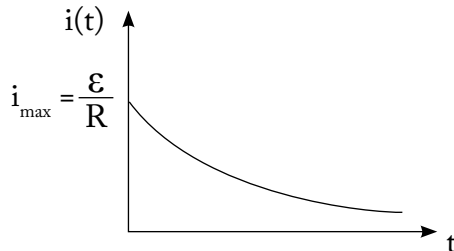


Figura 7.18. Proceso de carga $i(t)$ vs. t

7.8.2 Proceso de descarga del condensador

Para el proceso de descarga, el interruptor de la figura 7.16(a) pasa de la posición *a* a la posición *b*, el cual se representa en la figura 7.19. Aplicamos la ley de voltaje de Kirchhoff y realizamos el proceso siguiente:

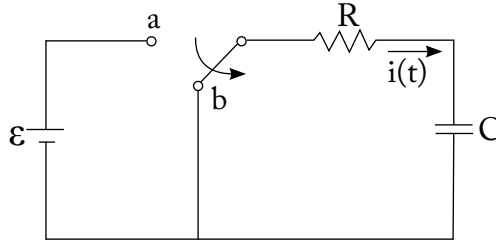


Figura 7.19. Proceso de descarga, circuito RC sin fuente

$$iR + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow -iR = \frac{q}{C} \rightarrow -R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \rightarrow -RC \frac{dq}{dt} = q$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\int \frac{dq}{q} = -\int \frac{1}{RC} dt \rightarrow \ln q = -\frac{t}{RC} + K$$

Para despejar *q* utilizamos el siguiente artificio matemático:

$$e^{\ln q} = e^{-\frac{t}{RC} + K} \rightarrow q = e^{-\frac{t}{RC} + K} = e^{-\frac{t}{RC}} e^K, \text{ pero } e^K = A \rightarrow q = A e^{-\frac{t}{RC}},$$

pero *q* varía con el tiempo, entonces $q = q(t)$, por lo tanto,

$$q(t) = A e^{-\frac{t}{RC}} \quad (7-18)$$

Para hallar el valor de *A*, utilizamos las condiciones iniciales en el proceso de descarga (figura 7.19); esto es: $t = 0$, $q = q_{\text{máx}}$, y evaluamos en (7-18).

$$q(0) = A e^0 = q_{\max} \rightarrow q_{\max} = A$$

$$q(t) = q_{\max} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (7-19)$$

La gráfica del proceso de descarga lo representamos en la figura 7.20 utilizando la ecuación (7-19).

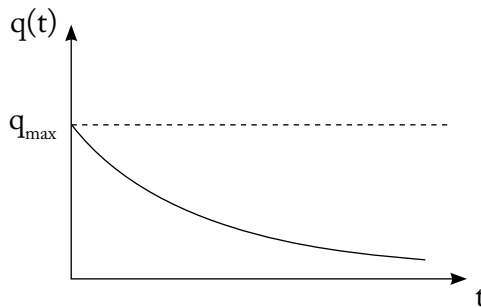


Figura 7.20. Proceso de descarga $q(t)$ vs. t

Para calcular la corriente del capacitor, derivamos la ecuación (7-19),

esto es, $i = \frac{dq}{dt}$

$$i(t) = \frac{d}{dt}(q(t)) = \frac{d}{dt}(q_{\max} e^{-\frac{t}{RC}}) = q_{\max} e^{-\frac{t}{RC}} \left(-\frac{1}{RC}\right) = -\frac{q_{\max}}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = i_{\max} e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow i_{\max} = -\frac{q_{\max}}{RC} = -\frac{\epsilon C}{RC} = -\frac{\epsilon}{R}$$

Finalmente, la corriente en el condensador representa la ecuación (7-20).

$$i(t) = -\frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (7-20)$$

La gráfica del proceso de descarga lo representamos en la figura 7.21 utilizando la ecuación (7-20).

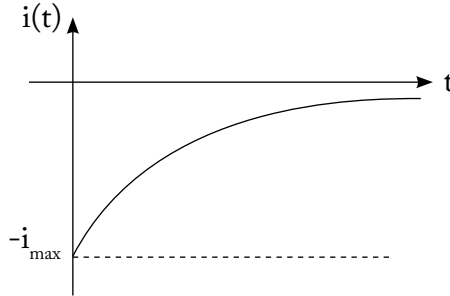


Figura 7.21. Proceso de descarga $i(t)$ vs. t

7.9 Ejercicios de aplicación (problemas resueltos del capítulo 7)

Problema 7.1. En el circuito de la figura 7.22(a), se encuentran varias resistencias conectadas en serie y en paralelo. Determinar la resistencia equivalente para calcular la corriente i del circuito.

Solución:

La resistencia de 2Ω y 4Ω (figura 7.22 (a) y (b)) se encuentran en serie, debido a que, por las dos resistencias, circula la misma corriente i_1 entre los nodos a y b , esto es, $R_{eq1} = 2+4 = 6\Omega$, lo que da como resultado el circuito de la figura 7.23.

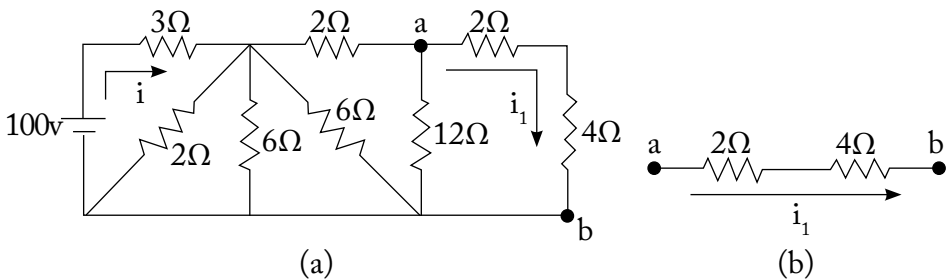


Figura 7.22. (b) R_{eq1} , de las resistencias en la trayectoria ab de (a)

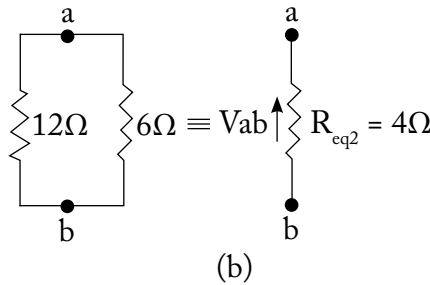
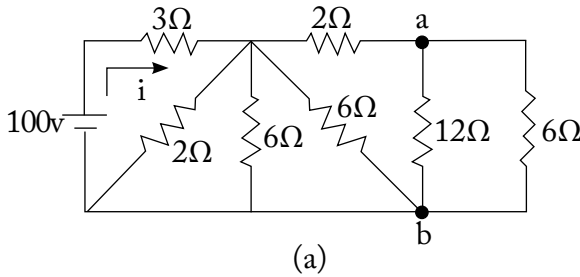


Figura 7.23. (b) R_{eq2} , de las resistencias en la rama ab de (a)

En la figura 7.23 (a) en el nodo a, la resistencia de 12Ω y de 6Ω se encuentran en paralelo, ya que el un extremo de los resistores están conectados al mismo nodo a y el otro extremo están conectados al mismo nodo b (figura 7.23 (a) y (b)), esto es $R_{eq2} = 4\Omega$, dando como resultado el circuito de la figura 7.24.

$$\frac{1}{R_{eq2}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = 0.25 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_{eq2}} = 0.25 \Omega \quad \rightarrow \quad R_{eq2} = 4 \Omega$$

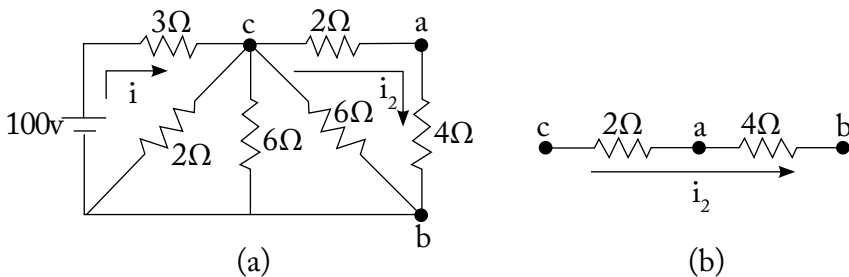


Figura 7.24. (b) R_{eq3} , de las resistencias en la trayectoria cab de (a)

En la figura 7.24(a), en la trayectoria cab , las resistencias de 2Ω y 4Ω se encuentran en serie, debido a que circula la misma corriente i_2 desde el nodo c hasta el nodo b , pasando por el nodo a (figura 7.24(a) y (b)) y dando como resultado el circuito de la figura 7.25.

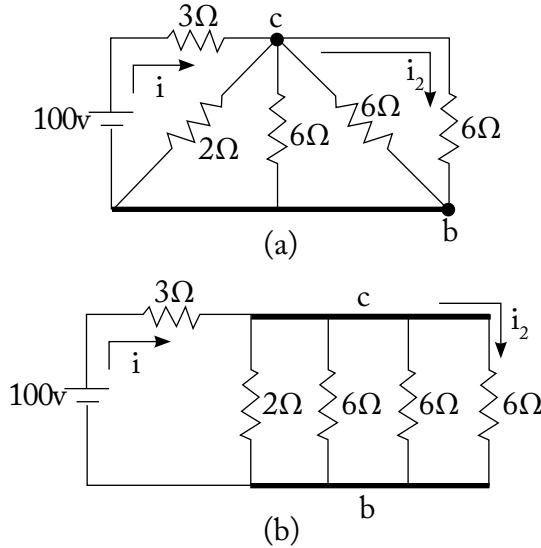


Figura 7.25. Los circuitos (a) y (b) son equivalentes.

En la figura 7.25(a) y (b), en los nodos c y b , las resistencias de 2Ω y las tres resistencias de 6Ω se encuentran en paralelo, ya que el un extremo de las resistencias está conectado al mismo nodo c y los otros extremos de las resistencias están conectados al otro nodo b , esto es $R_{cq4} = 1\Omega$. Lo que da como resultado el circuito de la figura 7.26 b.

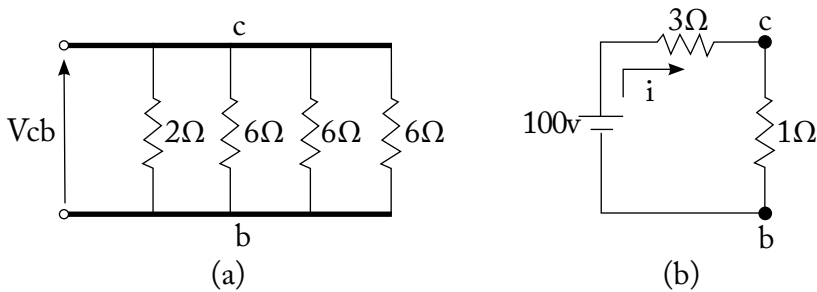


Figura 7.26. (b) R_{cq4} de las resistencias en los nodos c y b de (a)

$$\frac{1}{R_{\text{eq}4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1 \quad \rightarrow \quad R_{\text{eq}4} = 1\Omega$$

En el circuito de la figura 7.26(b), las resistencias de 3Ω y 1Ω están en serie, debido a que por ellas circula la misma corriente i ; entonces, la resistencia equivalente es $R_{\text{eq}5}$, lo que da como resultado el circuito de la figura 7.27.

$$R_{\text{eq}5} = 3 + 1 = 4\Omega$$

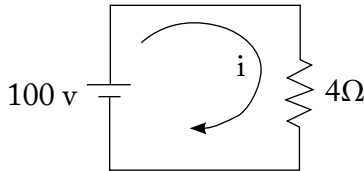


Figura 7.27. Resistencia equivalente total $R_{\text{eq}5} = 4\Omega$

Al circuito equivalente de la figura 7.27, aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff para calcular el valor de la corriente i .

$$-100 + 4i = 0$$

$$100 = 4i$$

$$i = \frac{100}{4} = 25\text{A}$$

Problema 7.2. En el circuito de la figura 7.28, determinar el voltaje y la corriente en cada una de las resistencias.

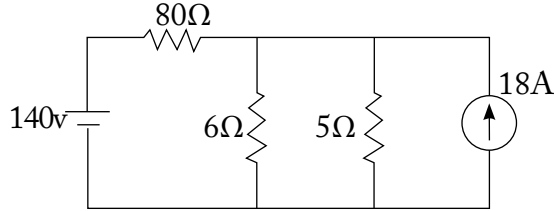


Figura 7.28. Circuito sencillo

Solución:

Volvemos a dibujar el circuito de la figura 7.28 y lo representamos en la figura 7.29, en el cual se observa claramente el nodo A y el nodo de referencia (Ref).

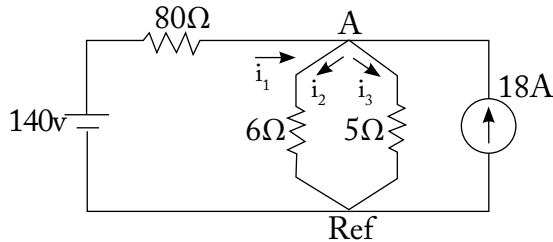


Figura 7.29. Circuito redibujado

Asignamos las corrientes de cada ramal que está unido al nodo A; esto es: i_1 , i_2 e i_3 . Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo A y asumiendo como positivas, todas las corrientes que entran al nodo A y negativas todas las corrientes que salen del nodo, entonces tenemos:

Nodo A (LCK)

$$i_1 + 18 - i_2 - i_3 = 0 \quad (7-21)$$

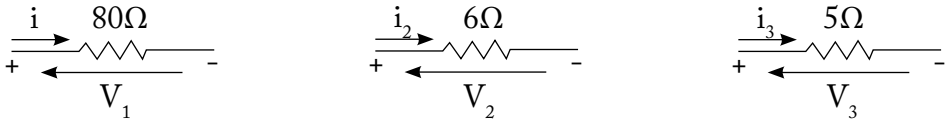


Figura 7.30. Ley de Ohm en cada resistencia de la figura 7.29

Aplicando la ley de Ohm en cada una de las resistencias (80, 6 y 5) ohmios de la figura 7.30, tenemos los voltajes V_1 , V_2 y V_3 y representamos en la figura 3.31.

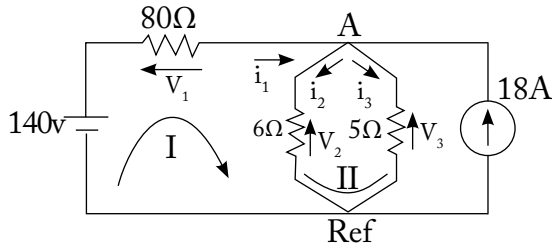


Figura 7.31. Lazos I y II

Lazo I (LVK)

$$-140 + V_1 + V_2 = 0$$

Reemplazando los valores de V_1 y V_2 , tenemos:

$$-140 + 80 i_1 + 6 i_2 = 0$$

$$140 = 80 i_1 + 6 i_2 \quad (7-22)$$

Lazo II (LVK)

$$-V_2 + V_3 = 0$$

$$-6 i_2 + 5 i_3 = 0 \quad (7-23)$$

De la ecuación (7-22), despejamos i_2 ; esto es:

$$i_2 = \frac{140 - 80 i_1}{6} \quad (7-24)$$

De la ecuación (7-23), despejamos i_3 ; esto es:

$$i_3 = \frac{6}{5}i_2$$

Reemplazando i_2 por (7-24), tenemos:

$$i_3 = \frac{6}{5} \frac{140 - 80 i_1}{6} = \frac{140 - 80 i_1}{5}$$

$$i_3 = 28 - 16 i_1 \quad (7-25)$$

(7-24) y (7-25) reemplazamos en la ecuación (7-21):

$$i_1 + 18 - \frac{140 - 80 i_1}{6} - (28 - 16 i_1) = 0$$

$$i_1 + 18 - 23.33 + 13.33 i_1 - 28 + 16 i_1 = 0$$

$$30.33 i_1 - 33.33 = 0$$

$$i_1 = 1.1 \text{ A}$$

$$\text{En la ecuación (7-25): } i_3 = 28 - 16(1.1) = 10.4 \text{ A}$$

En la ecuación (7-24):

$$i_2 = \frac{140 - 80(1.1)}{6} = 8.67 \text{ A}$$

Los voltajes en cada una de las resistencias son:

$$V_1 = 80 i_1 = 80 (1.1) = 88 \text{ V}$$

$$V_1 = 88 \text{ V}$$

$$V_2 = 6 i_2 = 6 (8.67) = 52.02 \text{ V}$$

$$V_2 = 52.02 \text{ V}$$

$$V_3 = 5i_3 = 5 (10.4) = 52 \text{ V}$$

$$V_3 = 52 \text{ V}$$

Problema 7.3. “Se va a generar calor en una resistencia de 0.10Ω , con una potencia de 10 watts, conectándole en un generador cuya fem es de 1.5 volt. (a) ¿Cuál debe ser la resistencia interior del generador? (b) ¿Qué diferencia de potencial hay entre los extremos de la resistencia?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1004).

Solución:

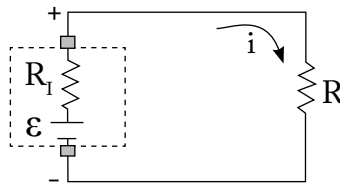


Figura 7.32. fem conectado en serie a dos resistencias

De acuerdo con los datos del problema, representamos en la figura 7.32 y, aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, tenemos:

$$-\epsilon + i R_1 + i R = 0,$$

Donde R_1 = resistencia interna, R = resistencia externa

$$i R_1 = \epsilon - i R$$

$$R_1 = \frac{\epsilon - i R}{i} = \frac{\epsilon}{i} - R$$

$$P = i^2 R \rightarrow i = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

$$R_1 = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\frac{P}{R}}} - R = \frac{1.5}{\sqrt{\frac{10}{0.1}}} - 0.1 = 0.05 \Omega$$

b) La diferencia de potencial en la resistencia externa es:

$$V = i R$$

$$P = i^2 R \Rightarrow i = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

$$V = \sqrt{\frac{P}{R}} R = \sqrt{\frac{10}{0.1}} \cdot 0.1 = 1 \text{ Volt}$$

$$V = 1 \text{ Volt}$$

Problema 7.4. “Un alambre de resistencia de 5Ω está conectado con una batería cuya fem es de 2.0 V y cuya resistencia interior es de 1.0Ω . En 2.0 min , (a) ¿qué cantidad de energía se transforma de química a eléctrica? (b) ¿Qué cantidad de energía aparece en el alambre como calor por el efecto joule? (c) Explicar la diferencia entre (a) y (b)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1004).

Solución:

a) Utilizamos el diagrama de la figura 7.32 y procedemos a calcular la energía (W):

$$W = P t, \quad P = i \mathcal{E}$$

Pero:

$$\mathcal{E} = i(R + R_1) \rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R + R_1}$$

Se reemplaza en W:

$$W = \mathcal{E} \frac{\mathcal{E}}{R + R_1} t$$

$$W = \frac{\mathcal{E}^2 t}{R + R_1} = \frac{(2.0)^2 (2 \times 60)}{5 + 1} = 80 \text{ Joule}$$

b) Cantidad de energía en el alambre R

$$P = i^2 R$$

$$P = \left(\frac{\mathcal{E}}{R + R_1}\right)^2 R = \left(\frac{2.0}{5 + 1}\right)^2 5 = 0.555 \text{ Watts}$$

$$W_2 = Pt = (0.555) (120) = 66.6 \text{ Joule}$$

c) La diferencia entre (a) y (b) es causada por la pérdida de energía debido a la resistencia interna.

Problema 7.5. “En el circuito de la figura 7.33, imaginar un amperímetro intercalado en la rama en que está R_3 . ¿Qué lectura dará suponiendo que $\varepsilon = 5.0 \text{ V}$, $R_1 = 2.0\Omega$, $R_2 = 4.0\Omega$ y $R_3 = 6.0\Omega$?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1004).

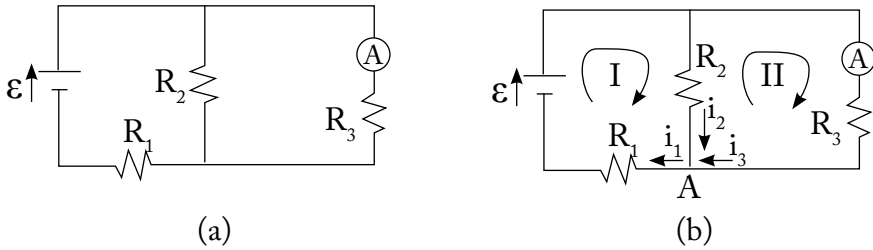


Figura 7.33. (b) Nodo A de (a)

Solución:

En la figura 7.33(a), escogemos el nodo A y asignamos las corrientes i_1 , i_2 e i_3 (figura 7.33(b)); luego, en este nodo, aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff. Entonces:

Nodo A (LCK)

$$i_2 + i_3 - i_1 = 0 \quad (7-26)$$

En la figura 7.33(b), asignamos dos lazos (I y II) con sus respectivas direcciones (en sentido de las manecillas del reloj). Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, tenemos:

Lazo I (LVK)

$$-\varepsilon + i_2 R_2 + i_1 R_1 = 0$$

$$\varepsilon = i_1 R_1 + i_2 R_2 \quad (7-27)$$

Lazo II (LVK)

$$i_3 R_3 - i_2 R_2 = 0$$

$$i_2 = \frac{R_3}{R_2} i_3 \quad (7-28)$$

De la ecuación (7-27), despejamos i_1 :

$$i_1 = \frac{\mathcal{E} - i_2 R_2}{R_1} \quad (7-29)$$

Reemplazamos la ecuación (7-28) en la ecuación (7-29):

$$i_1 = \frac{\mathcal{E} - \frac{R_3}{R_2} i_3 R_2}{R_1} = \frac{\mathcal{E} - R_3 i_3}{R_1} \quad (7-30)$$

Las ecuaciones (7-30) y (7-28) se reemplazan en la ecuación (7-26):

$$\frac{R_3}{R_2} i_3 + i_3 - \frac{\mathcal{E} - R_3 i_3}{R_1} = 0$$

$$i_3 \left[\frac{R_3}{R_2} + 1 + \frac{R_3}{R_1} \right] - \frac{\mathcal{E}}{R_1} = 0$$

$$i_3 = \frac{\frac{\mathcal{E}}{R_1}}{\frac{R_3}{R_2} + 1 + \frac{R_3}{R_1}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{6}{4} + 1 + \frac{6}{2}} = 0.4545 \text{ A}$$

$$i_3 = 0.4545 \text{ A}$$

Entonces, el amperímetro dará la lectura de la corriente i_3 .

Problema 7.6. “Dos baterías de fem ε y resistencia interior r se conectan en paralelo y, entre sus terminales, se conecta una resistencia R , como se ve en la figura 7.34(a). a) ¿Para qué valor de R es máxima la potencia proporcionada a la resistencia? b) ¿Cuál es la máxima potencia?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1005).

En el circuito de la figura 7.34, escogemos el nodo A y el nodo de referencia Ref; después, asignamos las corrientes i_1 , i_2 e i_3 con sus respectivas direcciones y, luego, asignamos los lazos I y II con sus respectivas direcciones. Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo A, tenemos:

Nodo A (LCK)

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad (7-31)$$

Aplicamos la ley de voltaje de Kirchhoff en el lazo I y II.

Lazo I (LVK)

$$ri_1 - \varepsilon + \varepsilon + r(-i_2) = 0$$

$$ri_1 - ri_2 = 0 \quad \rightarrow \quad i_1 = i_2$$

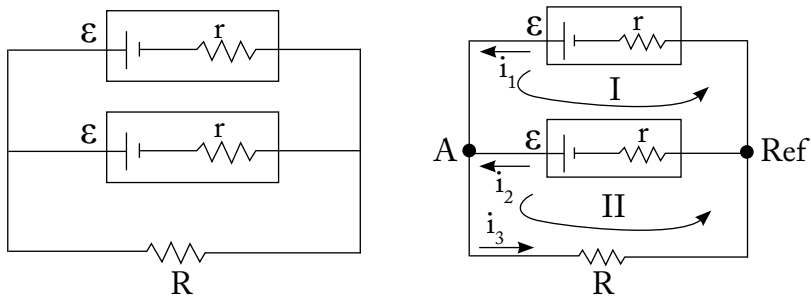


Figura 7.34. fem conectadas en paralelo

Lazo II (LVK)

$$ri_2 - \varepsilon + Ri_3 = 0$$

$$\mathcal{E} = r i_2 + R i_3, \text{ como } i_1 = i_2 \rightarrow \mathcal{E} = r i_1 + R i_3, \text{ como } i_3 = \mathcal{E} - r i_1 \rightarrow$$

$$i_3 = \frac{\mathcal{E} - r i_1}{R}, \text{ reemplazando en la ecuación (7-28)}$$

$$i_1 + i_1 - \frac{\mathcal{E} - r i_1}{R} = 0 \rightarrow i_1 + i_1 - \frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{r}{R} i_1 = 0$$

$$i_1 \left(2 + \frac{r}{R} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$i_1 \left(\frac{2R + r}{R} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R} \rightarrow i_1 = \frac{\mathcal{E}}{2R + r}$$

$$\text{De (7-28) } i_3 = i_1 + i_2 = 2i_1 \rightarrow i_3 = \frac{2\mathcal{E}}{2R + r}$$

La potencia en la resistencia R es:

$$P = i_3^2 R = \left(\frac{2\mathcal{E}}{2R + r} \right)^2 R$$

Si derivamos la potencia con respecto a R, tenemos:

$$P = \frac{4\mathcal{E}^2 R}{4R^2 + 4Rr + r^2} = 4\mathcal{E}^2 R (4R^2 + 4Rr + r^2)^{-1}$$

$$\frac{dp}{dR} = 4\mathcal{E}^2 (4R^2 + 4Rr + r^2)^{-1} + 4\mathcal{E}^2 R (-1) (4R^2 + 4Rr + r^2)^{-2} (8R + 4r)$$

$$\frac{dp}{dR} = \frac{4\mathcal{E}^2}{4R^2 + 4Rr + r^2} - \frac{4\mathcal{E}^2 R (8R + 4r)}{(4R^2 + 4Rr + r^2)^2}$$

Para que la potencia sea máxima, debemos igualar a cero la derivada:

$$\frac{dp}{dR} = 0$$

$$\frac{4\mathcal{E}^2}{4R^2 + 4Rr + r^2} - \frac{4\mathcal{E}^2 R(8R + 4r)}{(4R^2 + 4Rr + r^2)^2} = 0$$

$$\frac{4\mathcal{E}^2}{4R^2 + 4Rr + r^2} = \frac{4\mathcal{E}^2 R(8R + 4)}{(4R^2 + 4Rr + r^2)^2}$$

$$1 = \frac{R(8R + 4)}{4R^2 + 4Rr + r^2}$$

$$4R^2 + 4Rr + r^2 = 8R^2 + 4Rr$$

$$4R^2 + 4Rr + r^2 - 8R^2 - 4Rr = 0$$

$$-4R^2 + r^2 = 0$$

$$4R^2 = r^2$$

$$R = \sqrt{\frac{r^2}{4}}$$

$$R = \frac{r}{2}$$

b) La potencia es la máxima cuando $R = r/2$; reemplazando tenemos:

$$P_{\text{máx}} = \left(\frac{2\mathcal{E}}{2R + r} \right)^2 R$$

$$P_{\max} = \left(\frac{2\mathcal{E}}{2\left(\frac{r}{2}\right) + r} \right)^2 \frac{r}{2}$$

$$P_{\max} = \left(\frac{2\mathcal{E}}{r + r} \right)^2 \frac{r}{2} = \left(\frac{2\mathcal{E}}{2r} \right)^2 \frac{r}{2} = \frac{4\mathcal{E}^2}{4r^2} \frac{r}{2}$$

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{2r}$$

Problema 7.7. “El puente de Wheatstone. En la figura 7.35, R_x se va a ajustar a un valor tal que los puntos a y b tengan exactamente los mismos potenciales. (Se prueba esta condición conectando momentáneamente un galvanómetro sencillo entre a y b; si estos puntos están al mismo potencial, el galvanómetro no sufrirá ninguna desviación). Demostrar que al hacer este ajuste, se verifica la siguiente relación:

$$R_x = R_s \frac{R_2}{R_1}$$

Usando este aparato, que se llama puente de Wheatstone, se puede determinar resistencias desconocidas (R_x) en función de resistencias patrones (R_s)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1005).

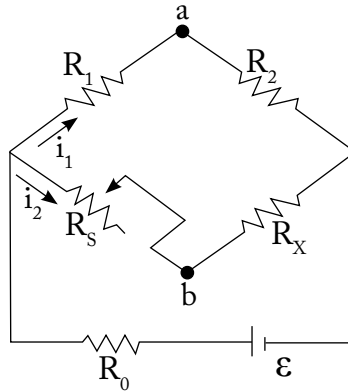


Figura 7.35. Puente de Wheatstone

Solución:

Cuando los puntos a y b están al mismo potencial, se debe cumplir que:

$$i_1 R_1 = i_2 R_S \quad (7-29)$$

$$i_1 R_2 = i_2 R_X \quad (7-30)$$

Dividiendo la ecuación (7-30) para la ecuación (7-29), tenemos:

$$\frac{i_1 R_2}{i_1 R_1} = \frac{i_2 R_X}{i_2 R_S}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_X}{R_S}$$

$$R_X = R_S \frac{R_2}{R_1} \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Problema 7.8. “Dos resistencias R_1 y R_2 se pueden conectar ya sea en serie o bien en paralelo, recibiendo corriente de una batería (sin resistencia) de fem (ϵ). Deseamos que el calentamiento por el efecto Joule para la combinación en paralelo sea cinco veces mayor que el calentamiento para la combinación en serie. Si $R_1 = 100 \Omega$, ¿cuánto vale R_2 ?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1006).

Solución:

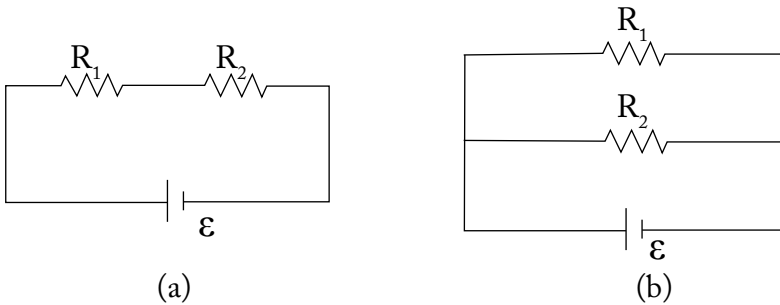


Figura 7.36. (a) Conexión serie, (b) conexión en paralelo

En la figura 7.36(a), se representa la conexión serie de las dos resistencias R_1 y R_2 , la resistencia equivalente es: $R = R_1 + R_2$, y la potencia de esta conexión es P_1 :

$$P_1 = \frac{\epsilon^2}{R} = \frac{\epsilon^2}{R_1 + R_2} = \frac{\epsilon^2}{100 + R_2} \quad (7-31)$$

En la figura 7.36(b), se representa la conexión en paralelo de las dos resistencias R_1 y R_2 ; la resistencia equivalente es R' y la potencia de esta conexión es P_2 , entonces:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{100} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + 100}{100R_2}$$

$$R' = \frac{100R_2}{R_2 + 100}$$

$$P_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R'} = \frac{\mathcal{E}^2}{\frac{100R_2}{R_2 + 100}} = \frac{\mathcal{E}^2 (R_2 + 100)}{100R_2} \quad (7-32)$$

Como el problema nos dice que la potencia en paralelo sea cinco veces la potencia en serie, entonces, $P_2 = 5P_1$.

$$\frac{5\mathcal{E}^2}{100 + R_2} = \frac{\mathcal{E}^2 (R_2 + 100)}{100R_2}$$

$$5 (100 R_2) = (R_2 + 100)^2$$

$$500R_2 = R_2^2 + 200R_2 + 10000$$

$$R_2^2 - 300R_2 + 10000 = 0$$

$$R_2 = \frac{300 \pm \sqrt{(-300)^2 - 4(10000)}}{2} = \frac{300 \pm 223.61}{2}$$

$$R_{21} = 261.8 \Omega$$

$$R_{22} = 38.195 \Omega$$

Debemos escoger una de las dos respuestas

$$\text{Con } R_2 = 261,8 \Omega$$

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{100 + R_2} = \frac{\mathcal{E}^2}{100 + 261.8} = \frac{\mathcal{E}^2}{361.8} = 2.76 \times 10^{-3} \mathcal{E}^2$$

$$P_1 = 2.76 \times 10^{-3} \mathcal{E}^2$$

$$P_2 = \frac{\mathcal{E}^2 (R_2 + 100)}{100 R_2} = \frac{\mathcal{E}^2 (261,8 + 100)}{100(261,8)} = \frac{361,8 \mathcal{E}^2}{26180} = 0.01382 \mathcal{E}^2$$

$$P_2 = 0.01382 \mathcal{E}^2$$

$$\text{Con } R_2 = 38.195$$

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{100 + R_2} = \frac{\mathcal{E}^2}{100 + 38.195} = \frac{\mathcal{E}^2}{138.195} = 7.24 \times 10^{-3} \mathcal{E}^2$$

$$P_1 = 7.24 \times 10^{-3} \mathcal{E}^2$$

$$P_2 = \frac{\mathcal{E}^2 (R_2 + 100)}{100 R_2} = \frac{\mathcal{E}^2 (38.195 + 100)}{(100)(38.195)}$$

$$P_2 = \frac{138.195 \mathcal{E}^2}{3819.5} = 0.0362 \mathcal{E}^2$$

$$P_2 = 0.0362 \mathcal{E}^2$$

Con $R_2 = 261.8 \Omega$, debe cumplir con la condición:

$$P_2 = 5P_1$$

$$0.01382 \mathcal{E}^2 = 5(2.76 \times 10^{-3} \mathcal{E}^2)$$

$$0.01382 \mathcal{E}^2 = 0.0138 \mathcal{E}^2 \quad (7-33)$$

Con $R_2 = 38.195 \Omega$ debe cumplir con la condición:

$$P_2 = 5P_1$$

$$0.0362 \mathcal{E}^2 = 5(7.24 \times 10^{-3} \mathcal{E}^2)$$

$$0.0362 \mathcal{E}^2 = 0,0362 \mathcal{E}^2 \quad (7-34)$$

Las dos condiciones se cumplen (7-33) y (7-34), pero debemos tomar el de menor valor ($R_2 = 38.195\Omega$), ya que a menor resistencia existe menor calentamiento por efecto Joule.

La respuesta es: $R_2 = 38.195 \Omega$

Problema 7.9: “¿Cuál es la resistencia equivalente entre los terminales x y y del circuito mostrado en la figura 7.37? Supóngase que la resistencia de cada conductor es de 10Ω ” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1006).

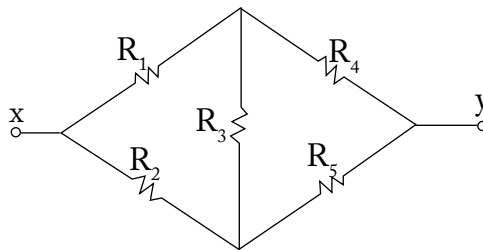


Figura 7.37. Resistencias que no están en serie ni en paralelo.

Solución:

En la figura 7.37, todas las resistencias no se encuentran en serie ni en paralelo; entonces, debemos hacer la transformación $\Delta \rightarrow Y$, tal como lo indica la figura 7.38. Sabemos que $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10$, por dato del problema.

Considerando la figura 7.38, tenemos:

$$R_a = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(10)(10)}{10 + 10 + 10} = \frac{100}{30} = \frac{10}{3} \Omega$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(10)(10)}{10 + 10 + 10} = \frac{100}{30} = \frac{10}{3} \Omega$$

$$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(10)(10)}{10 + 10 + 10} = \frac{100}{30} = \frac{10}{3} \Omega$$

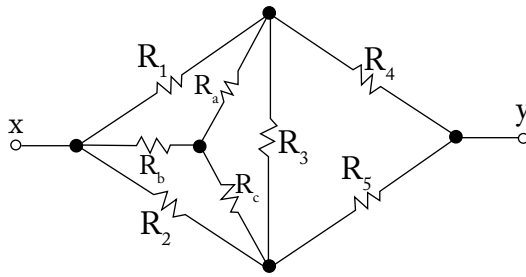


Figura 7.38. Transformación Δ a Y

Una vez obtenido las resistencias R_a , R_b y R_c , se muestra el circuito equivalente de la figura 7.39(a); redibujando este circuito se muestra el equivalente en la figura 7.39(b).

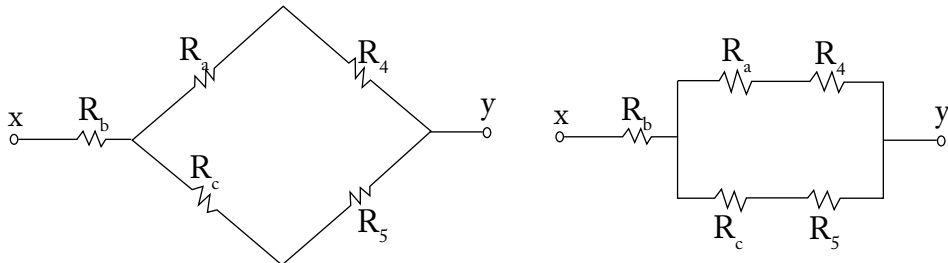


Figura 7.39 (a) Resultado de la transformación $\Delta \rightarrow Y$, (b) redibujado (a)

En el circuito de la figura 7.39(b), las resistencias R_a y R_4 se encuentran conectadas en serie. Entonces, la resistencia equivalente es R' . De igual forma, las resistencias R_c y R_5 se encuentran conectadas en serie; entonces, la resistencia equivalente es R'' . El circuito equivalente se muestra en la figura 7.40.

$$R' = R_a + R_4 = \frac{10}{3} + 10 = \frac{40}{3} \Omega$$

$$R'' = R_c + R_5 = \frac{10}{3} + 10 = \frac{40}{3} \Omega$$

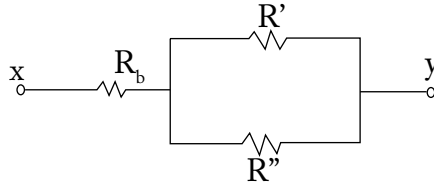


Figura 7.40. R' y R'' equivalentes

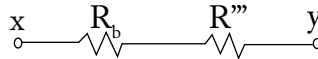


Figura 7.41. R''' equivalente



Figura 7.42. R equivalente total

En el circuito de la figura 7.40, las resistencias R' y R'' se encuentran conectadas en paralelo y su resistencia equivalente es R''' , el circuito equivalente se encuentra en la figura 7.41; entonces:

$$\frac{1}{R'''} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{\frac{40}{3}} + \frac{1}{\frac{40}{3}} = \frac{3}{40} + \frac{3}{40} = \frac{3}{20}$$

$$R''' = \frac{20}{3} \Omega$$

En la figura 7.41, las resistencias R_b y R''' están conectadas en serie y su resistencia equivalente es R , lo cual se encuentra representado en la figura 7.42. Entonces:

$$R = R_b + R''' = \frac{10}{3} + \frac{20}{3} = \frac{30}{3} = 10 \Omega$$

La resistencia $R = 10\Omega$, es la equivalente total del circuito de la figura 7.37.

CAPÍTULO 8 CAMPO MAGNÉTICO

8.1 Polos magnéticos

Según Resnick y Holliday (1977), los imanes naturales son de dos tipos: a) los que se encuentran en un trozo de material llamado magnetita (o las barras de imán permanente), y b) el imán natural que posee la Tierra (p. 1011). Estos materiales magnéticos tienen la propiedad de atraer al hierro no imanado, siendo el efecto más pronunciado en ciertas regiones del imán llamadas polos. Una barra de hierro, después de haber sido colocada cerca de un imán natural, adquiere y conserva esta propiedad de los imanes naturales.

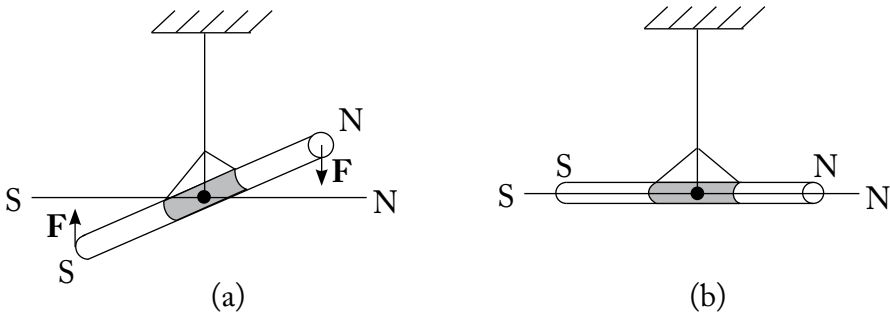


Figura 8.1. a) Barra de hierro imanada orientándose a los polos N y S terrestre, b) barra imanada alineada con los polos N y S.

Si se toma un pedazo de magnetita en forma de aguja y se suspende libremente de modo que pueda girar alrededor de un eje vertical, observamos que la aguja se orienta aproximadamente en la misma dirección Norte-Sur geográfica de la Tierra, tal como se muestra en la figura 8.1.

Si a un imán que tiene polos norte y sur lo dividimos en dos partes, en cada una de las partes nuevamente se forman los polos norte y sur, y si seguimos dividiendo, cada pedazo estará constituido por los dos polos magnéticos norte y sur (figura 8.2). Es imposible obtener monopolos magnéticos.

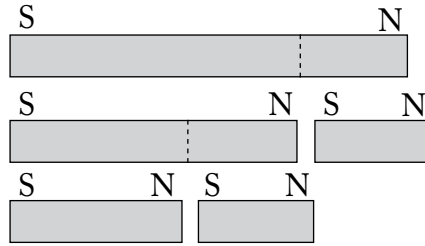


Figura 8.2. En cada división, se crean los polos magnéticos norte y sur.

Cuando existe un movimiento relativo del imán, se va a producir una fuerza magnética sobre el material B, el cual tiene cargas positivas Q ; si no hay movimiento relativo, la fuerza es cero (figura 8.3(a)).

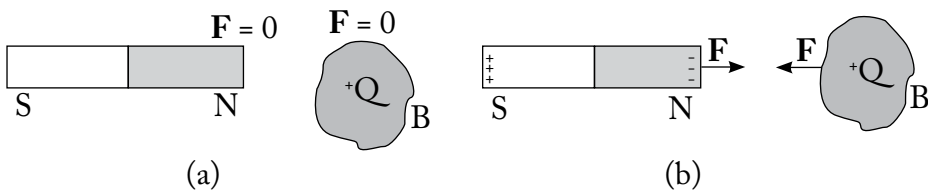


Figura 8.3. (a) El imán y la carga permanecen estáticos.
(b) Fuerza de atracción electrostática entre el imán y el cuerpo B cargado positivamente.

Excepción. - En la figura 8.3(b), el imán permanece estático; pero debido a las fuerzas electrostáticas (no son fuerzas magnéticas) entre el cuerpo (B) y el imán, existe una fuerza electrostática de atracción.

8.2 Descubrimiento de Oersted y Ampere

Resnick y Halliday (1977) manifiestan que, en 1820, **Oersted** descubrió que una corriente que circula por un alambre puede generar un campo magnético, de tal forma que, si le acercamos una aguja imantada, puede girar alrededor de su eje; y si le ponemos frente a un alambre conductor en forma de espiras (figura 8.4(a)) que llevan una corriente i , esta aguja tien-

de a alinearse con el campo producido por el hilo conductor, de la misma forma que lo hace girar un imán natural a la aguja imantada (figura 8.4(b)).

El trabajo de Oersted demostró que el movimiento de cargas eléctricas puede producir efectos magnéticos.

Ampere:

- 1.- Los fenómenos magnéticos proceden de las fuerzas originadas entre cargas eléctricas en movimiento.
- 2.- La posibilidad de que las propiedades magnéticas de la materia fueran consecuencia de minúsculas corrientes atómicas fue sugerida por primera vez por Ampere en 1820.

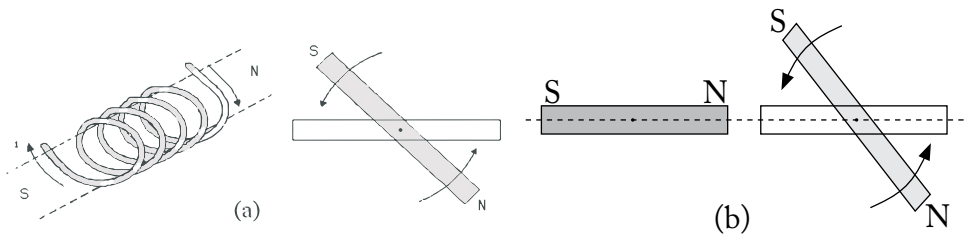


Figura 8.4 (a) Imán formado por un alambre enrollado, por el cual circula una corriente y hace girar una aguja magnética.
(b) Imán natural hace girar a una aguja magnética.

8.3 Campo magnético

Campo de inducción magnética B.- Decimos que existe un campo magnético en un punto si se produce una fuerza (aparte de la que se deba al campo eléctrico) sobre una partícula cargada que se mueva a través de dicho punto. Existen dos tipos de fuentes magnéticas:

1. La creada por un imán permanente y el magnetismo natural de la Tierra.
2. La creada por una corriente eléctrica i al circular por un alambre.

Características de la fuerza magnética (cuando existe movimiento relativo). Consideremos a la carga q_0 moviéndose con una velocidad v_0 a través de un campo de inducción magnética B , y citaremos tres características fundamentales como sigue:

- a) La fuerza F es directamente proporcional a la carga (q_0) de la partícula.
- b) La fuerza F es directamente proporcional a la magnitud de la velocidad (v).
- c) La fuerza F es siempre perpendicular a la velocidad en toda la trayectoria de la partícula.

Definición de la dirección de B

Consideremos una carga de prueba q_0^+ desplazándose con una velocidad arbitraria v por un punto P (figura 8.5). Si obra sobre ella una fuerza F que la desvíe lateralmente, afirmaremos que existe un campo magnético en el punto P y definimos la inducción magnética B de este campo en función de F , q_0 y v .

Si variamos la dirección de v (sin cambiar su magnitud) a lo largo de la trayectoria en algún punto P , encontramos que, la magnitud de la fuerza cambia, aun cuando F se conserva siempre perpendicularmente a v . Para una cierta dirección y sentido de v (y también para el sentido opuesto de v) la fuerza F se anula, definimos esta dirección como la dirección de la inducción magnética B .

En otras palabras, se define la dirección de B cuando la fuerza F es cero, entonces, la dirección de B es la misma que la dirección de la velocidad v (figura 8.5(b)).

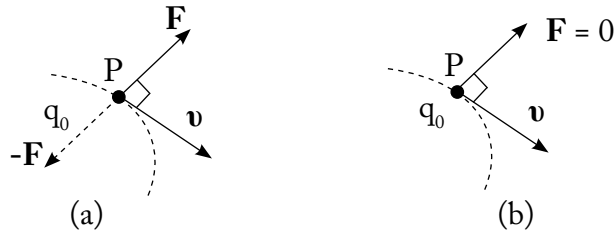


Figura 8.5 (a) El vector velocidad \mathbf{v} tangente a la trayectoria.
 (b) En cierta dirección y sentido de la velocidad \mathbf{v} ,
 la fuerza se anula; definimos esta dirección como
 la dirección de la inducción magnética \mathbf{B} .

Magnitud de \mathbf{B}

Una vez encontrada la dirección de \mathbf{B} , podemos orientar a \mathbf{v} de tal manera que la carga de prueba se mueva perpendicularmente a \mathbf{B} . Encontraremos que la fuerza F es entonces máxima, y definiremos la magnitud de \mathbf{B} midiendo la magnitud de esa fuerza máxima F perpendicular ($\mathbf{F} \perp$), o sea:

$$B = \frac{F_{\perp}}{q_0 v}$$

$$F_{\text{máx}} = q_0 v B, \text{ cuando el ángulo entre } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{B} \text{ es igual a } 90 \text{ grados } (\theta = 90^\circ).$$

$$F_{\text{mín}} = 0, \text{ cuando el ángulo entre } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{B} \text{ es igual a cero } (\theta = 0^\circ).$$

Consideremos esta dirección de \mathbf{B} (en la cual hemos especificado su magnitud y su dirección, pero no su sentido) como preliminar a la definición vectorial completa que ahora enunciaremos: si una carga de prueba q_0 positiva se dispara con una velocidad \mathbf{v} por un punto P y si obra una fuerza (lateral) \mathbf{F} sobre la carga que se mueve, hay una inducción magnética \mathbf{B} en el punto P , siendo \mathbf{B} el vector que satisface la relación, y se presenta en la ecuación (8-1). La figura 8.6 muestra las relaciones entre los vectores.

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{8-1}$$

La ecuación (8-1) sirve para calcular la fuerza F producida por el campo magnético externo \mathbf{B} sobre la carga q_0 cuando esta carga se mueva con una velocidad \mathbf{v} . Si una partícula cargada se mueve a través de una región en la cual hay tanto un campo eléctrico como un campo magnético, la fuerza resultante total es:

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_m, \text{ donde:} \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_E &= \text{fuerza eléctrica} \\ \mathbf{F}_m &= \text{fuerza magnética} \\ \mathbf{F}_E &= q_0 \mathbf{E} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_t = q_0 \mathbf{E} + q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (8-2)$$

A la ecuación (8-2), se la llama a veces relación de Lorentz.

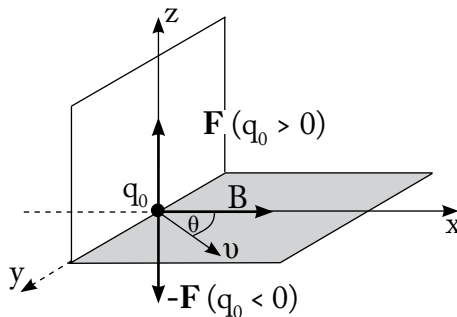


Figura 8.6 Relación vectorial entre \mathbf{F} , \mathbf{B} y \mathbf{v}

Unidades:

$$B \left[\frac{F}{q_0 v} \right] = \left[\frac{N}{C \frac{m}{s}} \right] = \left[\frac{N}{A \cdot m} \right] = \text{Tesla; (T)}$$

$$\text{Tesla} = \text{Webber/m}^2 = 10^{-4} \text{ Gauss}$$

8.4 Líneas de inducción magnética

En la figura 8.7, se muestran las líneas de inducción magnética para un imán permanente (recto), un alambre conductor de corriente i y de una espira que lleva una corriente i . A continuación, citamos algunas características de las líneas de inducción magnética:

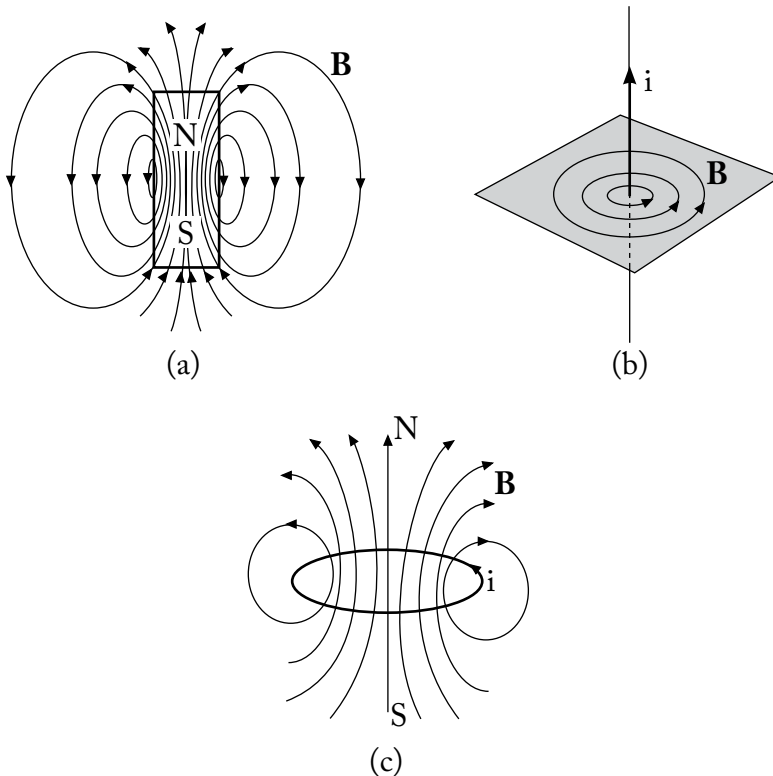


Figura 8.7. Geometría de las líneas de inducción magnética \mathbf{B} para: (a) imán recto, (b) alambre recto (regla de la mano derecha), (c) espira que lleva una corriente i

- a) Salen del polo norte.
- b) Entran al polo sur.
- c) No se cruzan entre sí.

- d) Su concentración por unidad de área (densidad de líneas de inducción) es proporcional a la magnitud del campo magnético \mathbf{B} .
- e) La tangente a una línea de inducción en un punto cualquiera, da la dirección de \mathbf{B} en ese punto.

En la figura 8.8(a), cuando la corriente entra al plano en forma perpendicular, se representa con una x. Cuando la corriente sale del plano en forma perpendicular, se representa con un punto (figura 8.8(b)).

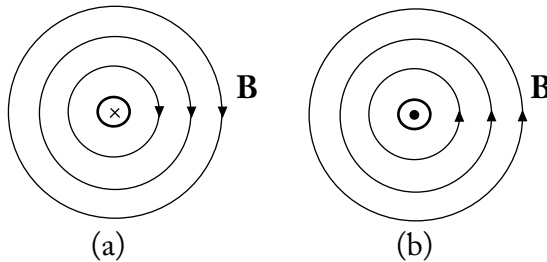


Figura 8.8. (a) El alambre lleva una corriente i entrando al plano ($\otimes i$), (b) el alambre lleva una corriente i saliendo del plano ($\odot i$).

8.5 Fuerza magnética sobre un conductor

Una corriente i es un conjunto de cargas en movimiento. Debido a que un campo magnético ejerce una fuerza lateral sobre una carga en movimiento, esperamos que también ejerza una fuerza lateral sobre un alambre que lleva corriente. La figura 8.9 muestra un tramo de alambre de longitud l , que lleva una corriente i y que está colocado en un campo magnético \mathbf{B} .

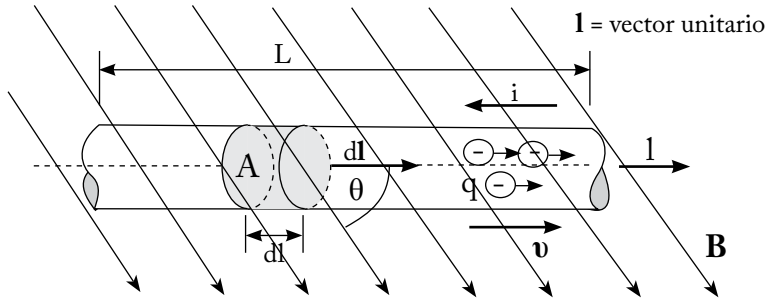


Figura 8.9. Electrones desplazándose en un alambre conductor, de menos (-) a más (+).

La corriente i en un alambre de metal es transportada por los electrones libres (o de conducción), donde n es el número de electrones por unidad de volumen del alambre. La longitud dl del alambre contiene $nAdl$ electrones libres, donde Adl es el volumen de la sección de alambre de sección transversal A que se está considerando. La fuerza total sobre los electrones libres en el alambre y, por consiguiente, la fuerza sobre el alambre mismo es:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$dq = (nA dl) e, \quad e = \text{electrón}$$

$$d\mathbf{F} = (nA dl e) \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \text{donde } \mathbf{v} = Vd \mathbf{l}$$

$$d\mathbf{F} = (nA dl e) (Vd \mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

$$d\mathbf{F} = (nA e Vd) (dl \mathbf{l} \times \mathbf{B}), \quad \text{donde } d\mathbf{l} = dl \mathbf{l}$$

Vd es la velocidad de arrastre de los electrones y el valor de $(nAe Vd)$, es igual a la corriente i . Reemplazando valores e integrando, se obtiene la ecuación (8-3), que sirve para calcular la fuerza que produce un campo magnético externo sobre el alambre que lleva una corriente i :

$$d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = i \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (8-3)$$

8.6 Momento de torsión sobre un lazo de corriente en un campo magnético uniforme

Dipolo magnético.- La figura 8.10 muestra una espira rectangular de alambre de longitud b y de anchura a colocada en el plano xy , se encuentra en un campo uniforme de inducción magnética \mathbf{B} ; el área que describe la espira está en forma normal a la dirección del campo magnético \mathbf{B} . \mathbf{n} es un vector normal que se encuentra perpendicular al plano xy de la espira, entendiéndose que el vector normal es perpendicular de la superficie hacia fuera.

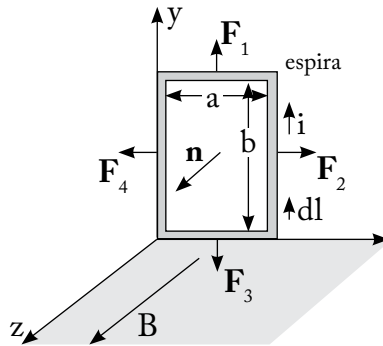


Figura 8.10 Una bobina rectangular que lleva una corriente i se coloca en un campo magnético uniforme externo \mathbf{B} .

En la figura 8.10, la fuerza total en la espira es igual a cero ($\mathbf{F} = 0$), debido a que el campo de inducción magnético \mathbf{B} es constante. Utilizando la ecuación (8-3), calculamos las cuatro fuerzas que actúan sobre la espira. El vector $d\mathbf{l}$, en las cuatro secciones de la espira se dibuja en la misma dirección que circula la corriente i ; de tal forma que, aplicando el producto cruz, la dirección de las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ y \mathbf{F}_4 se dibujan como se muestra en la figura 8.10 y los valores de cada una de las fuerzas son:

$$\mathbf{F} = i \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$F_1 = \int i dl B \text{ Sen } 90^\circ = \int_0^a i dl B = iaB$$

$$F_1 = F_3 = iaB$$

$$F_2 = \int i dl B \text{ Sen } 90^\circ = \int_0^b i dl B = ibB$$

$$F_2 = F_4 = ibB$$

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$$

$$F_T = F_1 + F_2 - F_3 - F_4$$

$$F_T = iaB + ibB - iaB - ibB = 0$$

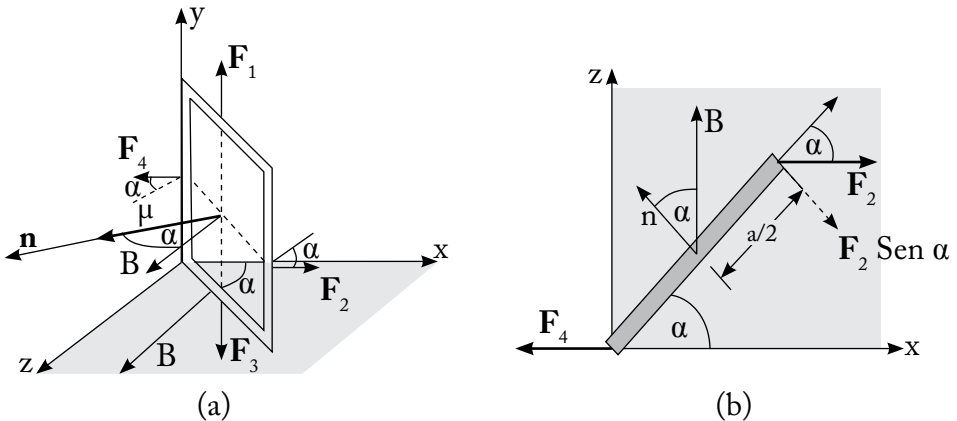


Figura 8.11 (a). La espira ha rotado un ángulo α , (b) lado a de la espira con \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_4 .

La espira de la figura 8.11(a) ha sido rotada en un ángulo α en el plano xz . En la figura 8.11(b), se encuentran las fuerzas \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_4 sobre el lado a de la espira. Debido a que estas fuerzas son iguales y opuestas, se genera un torque (τ) en la espira, esto es: $\tau = Fx$, siendo F = fuerza actuante en la espira, x = distancia, $x = a/2$. El torque total (τ) sobre la sección de alambre a de la espira es: $\tau = \tau_2 + \tau_4$.

$$\tau_2 = F_2 \frac{a}{2} \text{Sen } \alpha \quad \tau_4 = F_4 \frac{a}{2} \text{Sen } \alpha$$

$$F = F_2 = F_4 = ibB$$

$$\tau = F_2 \frac{a}{2} \text{Sen } \alpha + F_4 \frac{a}{2} \text{Sen } \alpha$$

$$\tau = F \frac{a}{2} \text{Sen } \alpha + F \frac{a}{2} \text{Sen } \alpha$$

$$\tau = 2F \frac{a}{2} \text{Sen } \alpha = Fa \text{Sen } \alpha = ibB a \text{Sen } \alpha = (ab) iB \text{Sen } \alpha$$

ab = área que describe la espira

$$\tau = iAB \text{Sen } \alpha \quad (\text{para una espira})$$

$$\tau = iNAB \text{Sen } \alpha \quad (\text{para } N \text{ espiras}) \quad (8-4)$$

Momento de dipolo magnético (μ)

De la ecuación (8-4), el momento de dipolo magnético lo representamos con el símbolo μ y es igual a:

$$\mu = i N A \quad (\text{en magnitud})$$

$$\boldsymbol{\mu} = iN\mathbf{A}\mathbf{n} \quad (\text{vectorialmente})$$

$$\tau = \mu B \text{Sen } \alpha$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (8-5)$$

8.7 Ejercicios de aplicación (problemas resueltos del capítulo 8)

Problema 8.1: un protón que se desplaza hacia el este en las capas superiores de la atmósfera, a una velocidad de 5×10^5 m/seg, suponiendo que el campo de la Tierra en ese punto tenga una intensidad de 0.5×10^{-4} Tesla, y se dirige hacia el sur. Calcular: a) la magnitud de la fuerza sobre el protón, b) la dirección de esta fuerza, c) la aceleración del protón.

Solución:

En la figura 8.12, se muestra el diagrama en el cual el protón se encuentra desplazándose hacia el este con una velocidad \mathbf{v} , dentro de un campo magnético \mathbf{B} que se dirige hacia el sur. Para calcular la fuerza que actúa sobre la carga (protón), procedemos de la siguiente forma:

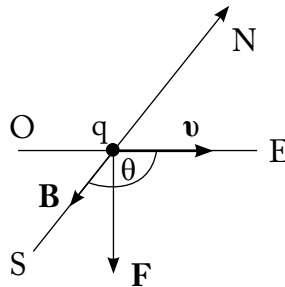


Figura 8.12. Desplazamiento de un protón

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$F = qvB \sin \theta = qvB \sin 90^\circ = qvB$$

$$F = (1,6 \times 10^{-19}) (5 \times 10^5) (0,5 \times 10^{-4}) = 4 \times 10^{-18} \text{ N}$$

- $F = 4 \times 10^{-18} \text{ N}$
- La fuerza está dirigida hacia abajo, perpendicular al plano que contiene los dos vectores \mathbf{v} y \mathbf{B} .
- $F = m a$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{4 \times 10^{-18} \text{ Kg m/seg}^2}{1.67 \times 10^{-29} \text{ kg}} = 2.4 \times 10^{11}$$

$$a = 2.4 \times 10^{11} \text{ m/seg}^2$$

Problema 8.2: “Espectrómetro de masa. La figura 8.13 muestra un dispositivo usado por Dempster para medir las masas de los iones. La puerta S es una cámara en la cual se está efectuando una descarga de un gas y produce un ion de masa M y carga q casi sin velocidad. El ion se acelera mediante una diferencia de potencial V y se hace entrar a un campo de inducción magnética **B**. En el campo, describe un semicírculo y va a chocar contra una placa fotográfica a una distancia x de la abertura de entrada, dejando ahí su marca. Demostrar que la masa M está dada por la siguiente

formula: $M = \frac{B^2 q}{8V} x^2$ ” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1045).

Solución:

En la figura 8.13, el punto (•) significa que el campo magnético **B** está saliendo del plano en forma perpendicular. La fuerza magnética que actúa sobre la carga es:

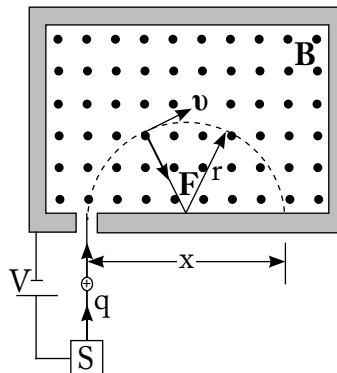


Figura 8.13. Espectrómetro de masa

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$F = q v B \text{ Sen} \theta = q v B \text{ Sen } 90^\circ = q v B \quad (8-6)$$

$$F = ma \quad \rightarrow \quad m = M, \quad r = \frac{x}{2}, \quad a = \frac{v^2}{r}$$

$$F = M \frac{v^2}{r} = M \frac{2v^2}{x} \quad (8-7)$$

La ecuación (8-6) es igual a la ecuación (8-8),

$$q v B = M \frac{2v^2}{x} \quad \rightarrow \quad v = \frac{q B x}{2M} \quad (8-8)$$

La energía total (W) es igual a la variación de la energía cinética (Δk) más la variación de la energía potencial (ΔU)

$$W = \Delta k + \Delta U \quad (8-9)$$

$$\Delta U = 0, \quad W = qV, \quad \Delta k = \frac{1}{2} M (v^2 - v_0^2), \quad v_0 = 0$$

Reemplazando en (8-9), tenemos:

$$qV = \frac{1}{2} M (v^2 - v_0^2) \quad \rightarrow \quad qV = M v^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qV}{M}} \quad (8-10)$$

$$(8-8) = (8-10)$$

$$\frac{q B x}{2M} = \sqrt{\frac{2qV}{M}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación y despejando M , tenemos:

$$\frac{q^2 B^2 x^2}{4M^2} = \frac{2qV}{M} \rightarrow M = \frac{qB^2 x^2}{8V}$$

$$M = \frac{B^2 q}{8V} x^2 \text{ L.Q.Q.D.}$$

Problema 8.3: por un conductor de la forma indicada en la figura 8.14, circula una corriente i ; este conductor se encuentra en un campo de inducción \mathbf{B} uniforme. Calcular la fuerza total sobre el conductor.

Solución:

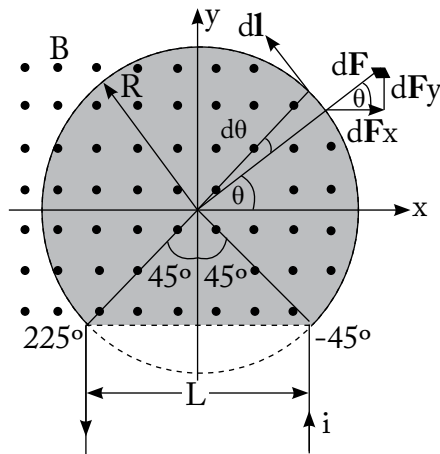


Figura 8.14. Alambre circular en un \mathbf{B} externo

$$d\mathbf{F} = dF_x + dF_y$$

$$F_x = \int dF_x = 0, \text{ por simetría}$$

$$F_y = \int dF_y$$

$dF_y = dF \text{ Sen } \theta \rightarrow dF = idl B \text{ Sen } \phi$, donde $\phi = 90^\circ$, es el ángulo que forma el vector dl con el vector \mathbf{B} (que sale del plano), $dF = idl B \text{ Sen } 90^\circ$, $dF = idl B$.

$$F = \int dF_y = \int dF \text{ Sen } \theta = \int idl B \text{ Sen } \theta$$

$$dl = R d\theta$$

$$F = i B \int R \text{ Sen } \theta d\theta$$

$$F = i BR \int_{45^\circ}^{225^\circ} \text{ Sen } \theta d\theta$$

$$F = i BR \left[-\text{Cos } \theta \Big|_{45^\circ}^{225^\circ} = -i BR (\text{Cos } 225^\circ - \text{Cos } 45^\circ) \right]$$

$$F = -i BR (-0.7071 - 0.7071) = i BR (1.4142)$$

$$F = \sqrt{2} i BR$$

Problema 8.4: “Un alambre de 60 cm de longitud y 10 g de masa está suspendido mediante unos alambres flexibles en un campo magnético de inducción de 0.40 weber/m². ¿Cuál es la magnitud y dirección de la corriente que se requiere para eliminar la tensión en los alambres que la sostienen? (véase la figura 8.15)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1040).

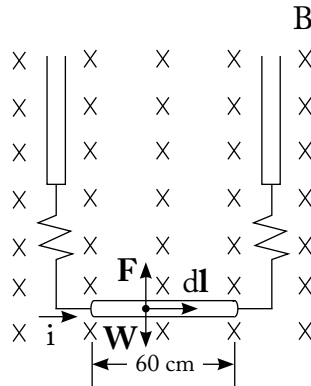


Figura 8.15. Alambre de 60 cm en un \mathbf{B} externo

Solución:

Para eliminar la tensión en los alambres que lo sostienen, la fuerza magnética \mathbf{F} debe estar dirigida hacia arriba; entonces, la dirección de la corriente i debe ser hacia la derecha, tal como indica la figura 8.15. Para calcular la magnitud de la fuerza, utilizamos el siguiente procedimiento:

$$\text{Datos: } l = 60 \text{ cm} = 0.6 \text{ m}$$

$$B = 0.40 \text{ weber/m}^2$$

$$M = 10 \text{ g} = 10^{-2} \text{ kg}$$

$$\mathbf{F} = i \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$F = i \int dl B \text{ Sen } 90^\circ$$

$$F = iB \int_0^l dl = iBl$$

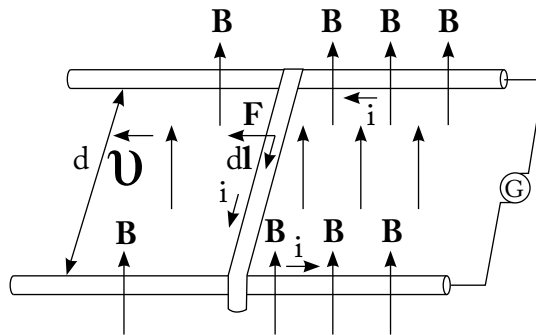
$$F = iBl \rightarrow i = \frac{F}{Bl} = \frac{mg}{Bl}, \text{ donde } g = 9.8 \text{ m/seg}^2 = \text{aceleración de la gravedad}$$

$$i = \frac{(1.10^{-2}) (9.8)}{(0.40) (0.6)} = 0.40833$$

$$i = 0.408 \text{ A}$$

Problema 8.5: “Un alambre metálico de masa m se desliza sin fricción en dos rieles separados una distancia d , como se muestra en la figura 8.16. La vía está colocada en un campo uniforme vertical de inducción magnética \mathbf{B} . Una corriente constante i sale del generador G a un riel, sigue por el alambre y regresa por el otro riel. Encontrar la velocidad (magnitud, dirección y sentido) del alambre en función del tiempo, suponiendo que se encuentra en reposo para $t = 0$ ” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1040).

Solución:



Ejemplo 8.16. Alambre se desliza sobre un riel

$$\mathbf{F} = i \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$F = i \int dl B \sin \theta = i \int dl B \sin 90^\circ = iB \int_0^d dl = iB \left[l \right]_0^d$$

$$F = iBd \tag{8-11}$$

$$F = ma = m \frac{v}{t} = m \left(\frac{v - v_0}{t - t_0} \right)$$

Donde $v_0 = 0$ (velocidad inicial), $t_0 = 0$ (tiempo inicial)

$$F = m \frac{v}{t} \quad (8-12)$$

La ecuación (8-11) es igual a la ecuación (8-12):

$$iBd = m \frac{v}{t}$$

$$v = \frac{iBd}{m} t$$

Problema 8.6: “Una barra de cobre que pesa 1.335 N (0.30 lb), reposa en dos rieles separados 0.30 m (1.0 pies) y lleva una corriente de 50 Amp de un riel al otro. El coeficiente de fricción de arranque es de 0.60. ¿Cuál es el mínimo valor del campo magnético que es capaz de hacer que la barra resbale y cuál debe ser su dirección? (ver figura 8.17)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1042).

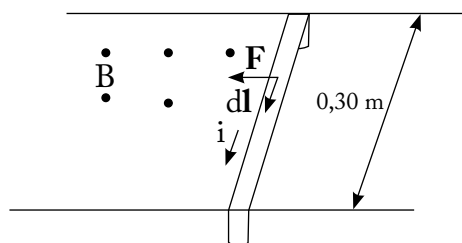


Figura 8.17. Una barra de cobre reposa sobre dos rieles.

Solución:

$$\mathbf{F} = i \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$F = i \int dl B \text{ Sen } \theta = i \int dl B \text{ Sen } 90^\circ = i \int_0^l dl B$$

$$F = i B l \quad (8-13)$$

La fuerza de fricción es la fórmula que viene dada en la ecuación (8-14), donde μ = coeficiente de fricción, y N = fuerza normal:

$$F = \mu N \quad (8-14)$$

La ecuación (8-13) es igual a la ecuación (8-14).

$$iBl = \mu N$$

$$B = \frac{\mu N}{il} = \frac{(0,6)(1,335)}{(50)(0,3)} = 0,534$$

Problema 8.7: “La figura 8.18 muestra una de las espiras rectangulares de 10 cm por 5,0 cm de una bobina de 20 espiras. Lleva una corriente de 0.10 A y tiene goznes en un lado. ¿Qué momento obra sobre la espira (tamaño, dirección y sentido) si está montada con su plano formando un ángulo de 30° con respecto a la dirección de un campo uniforme de inducción magnéticas 0.50 weber/m^2 ?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1042).

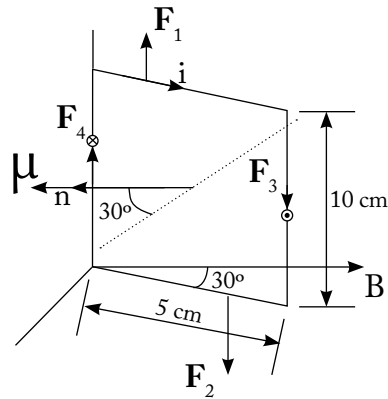


Figura 8.18. Espira rectangular en un campo **B**

Solución:

Utilizando la formula $\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, hallamos las direcciones de las fuerzas \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 y \mathbf{F}_4 (figura 8.18). El vector \mathbf{F}_3 está saliendo del plano y el vector \mathbf{F}_4 está entrando al plano. Para calcular el torque, utilizamos la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

$$\tau = \mu B \text{ Sen } (90^\circ - 30^\circ) = \mu B \text{ sen } 60^\circ$$

siendo, $\mu = iNA$, $A = \text{área de la espira}$, $N = \text{número de espiras}$

$$A = (0.10)(0.05) = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\tau = B \text{ Sen } 60^\circ = iNAB \text{ Sen } 60^\circ$$

$$\tau = (0.10)(5 \times 10^{-3})(20)(0.50) \text{ Sen } 60^\circ$$

$$\tau = 4.3 \times 10^{-3} \text{ Newton-m}$$

El vector momento ($\boldsymbol{\tau}$) es paralelo al lado más largo de la bobina.

Problema 8.8: “La figura 8.19 muestra un cilindro de madera, que tiene una masa m de 0.25 kg, un radio R y una longitud l de 0.1 m con N igual a diez vueltas de alambre enrollado en torno de él longitudinalmente, de manera que el plano de la espira de alambre contiene el eje del cilindro. Calcular cuál es la mínima corriente que debe pasar por la espira para impedir que el cilindro ruede por un plano inclinado θ con la horizontal, en presencia de un campo vertical de inducción magnética de 0.5 weber/m^2 , si el plano de las espiras es paralelo al plano inclinado” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1043).

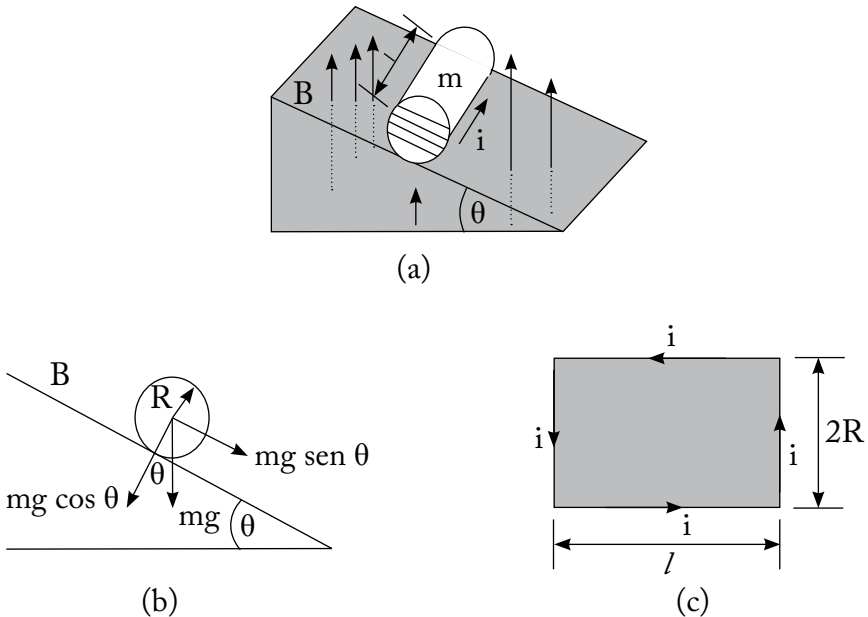


Figura 8.19a) y b) Cilindro rodando, c) área lateral

En la figura 8.19(b), el torque debido a la componente del peso es:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \times \mathbf{r}$$

$$\tau = m g R \text{ Sen } \theta \tag{8-15}$$

El torque magnético es:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

$$\tau = \mu B \text{ Sen } \theta = iANB \text{ Sen } \theta$$

$$\begin{aligned} \text{En la figura 8.19(c), } A &= 2Rl \\ &= i(2Rl)NB \text{ Sen } \theta \end{aligned} \quad (8-16)$$

La ecuación (8-15) es igual a la ecuación (8-16):

$$mg R \text{ Sen } \theta = 2 i RNB \text{ Sen } \theta$$

$$mg = 2 i lNB$$

$$i = \frac{mg}{2lNB} = \frac{(0.25)(9.8)}{2(0.1)(10)(0.5)} = 2,45 \text{ amp}$$

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos se publica con el único propósito de ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de los campos electromagnéticos y circuitos eléctricos.

La obra está destinada a aquellos estudiantes de ciencia e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral, y de álgebra vectorial. La parte teórica presenta los principales aspectos en los que se basa el electromagnetismo, para luego poder aplicarlos en el desarrollo de problemas, siendo así una herramienta de trabajo de fácil entendimiento para el estudiante.

A lo largo de todo el libro, se concede atención a las leyes de: Coulomb, Gauss, Ohm, Kirchhoff, Ampere, Biot-Savart y Lenz. Estas leyes son fundamentales para el aprendizaje, de tal forma que se las puede emplear en el estudio de los circuitos eléctricos y magnéticos.

Pedro Infante Moreira nació en Quinsaloma, provincia de Los Ríos, en 1959. Es ingeniero electrónico, graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral, y tiene un Diplomado Superior en Pedagogía Universitaria, Maestrías en Gestión Académica Universitaria y Administración de Empresas. Actualmente es candidato a un Doctorado en Ciencias Técnicas. Tiene 22 años en la docencia, en la Universidad Técnica de Babahoyo, la Universidad Nacional de Chimborazo y en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Ha publicado varios textos básicos, solucionarios y un libro.



ISBN: 978-9942-14-228-3

